L1 - MPI - SESSION 2 (juin 2017)

CORRIGÉ de l'EXAMEN de POLYNÔMES et SUITES

QUESTIONS ET APPLICATIONS DU COURS :

(1) $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \overset{\text{déf}}{\iff} \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

(2) (a) FAUX. Car $d^\circ(X^2+X+1)=2$ et les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont de $d^\circ = 1$.

(b) FAUX. Car si c'était le cas on aurait la factorisation $X^4+i = (X-\alpha)(X-\bar\alpha)(X-\beta)(X-\bar\beta)$
$= (X^2 - 2\mathrm{Re}\,\alpha + |\alpha|^2)(X^2 - 2\mathrm{Re}\,\beta + |\beta|^2)$ qui est un polynôme à coéfficients réels ce qui n'est pas le cas de X^4+i.

(c) FAUX : Contreexemple : $u_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
On a bien $1 < \frac{3}{2} - \frac{1}{3} < \ldots < u_n < \frac{3}{2} < 2$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \to \frac{3}{2} < 2$ quand $n \to \infty$.

(d) FAUX : C'est l'implication inverse qui est vraie en général. Mais si, par ex. $u_n = \frac{1}{n}$ on a bien $u_n \to 0$ et pourtant $\sum_{k=1}^{n} u_k \to \infty$ quand $n \to \infty$.

(e) FAUX : Contreexemple : $u_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.
Toute suite extraite de celle-ci est $(u_{\varphi(n)})$ avec $\varphi(n) > n$ donc :
$u_n = n < \varphi(n) = u_{\varphi(n)} \longrightarrow +\infty$
quand $n \to \infty$.

EXERCICE 1 :

(a) $S = 3X^2 + 7X + 1$;
$T = 6X^3 + 19X^2 + 11X - 6$

(b)
$$\begin{array}{rl|l} P = & 6X^3 + 20X^2 + 11X - 6 & 3X^2+7X+1 = S \\ - & 6X^3 - 14X^2 - 2X & \hline 2X+2 \\ \hline & \quad\quad 6X^2 + 9X - 6 & \\ & - 6X^2 - 14X - 2 & \\ \hline & \quad\quad -5X - 8 = R_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l} P = & 6X^3 + 20X^2 + 11X - 6 & 6X^3 + 19X^2 + 11X - 6 \\ - & 6X^3 - 19X^2 - 11X + 6 & \hline 1 \\ \hline & \quad X^2 = R_2 & \end{array}$$

(c) Comme $T = Q_1 \cdot Q_2$ les racines de T sont celles de Q_1 et de Q_2, à savoir :
pour Q_1 : $x_{\frac{1}{2}} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5\pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$

pour Q_2 : $x_3 = -\frac{3}{2}$

(d)* On écrit le théorème de division euclidienne pour la division de P par T : $\exists!\, D, R \in \mathbb{R}[X]$ t.q.
$P = T \cdot D + R$ et $d^\circ R \lneq d^\circ T = 3$
d'où $d^\circ R \leq 2$ donc $R = aX^2 + bX + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ sont des inconnues qui seront trouvées en imposant à ce que $P = T\cdot D + R$ soit vérifiée en chaque racine de T (ce qui fera disparaître $T\cdot D$).
Donc $P(x_{\frac{1}{2}\,3}) = \underbrace{T(x_{\frac{1}{2}\,3})}_{=0 \text{ car } x_{\frac{1}{2}\,3} \text{ racines de } T} \cdot D(x_{\frac{1}{2}\,3}) + R(x_{\frac{1}{2}\,3})$
d'où :
$$\begin{cases} P(\frac{1}{3}) = a\left(\frac{1}{3}\right)^2 + b\cdot\frac{1}{3} + c \\ P(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + c \\ P(-\frac{3}{2}) = a\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{3}{2}\right) + c \end{cases}$$
est un système 3×3 à résoudre en inconnues a, b, c

Par calcul, on déduit $P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$; $P(-2)=4$; $P\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$ donc le système devient :

$$\begin{cases} a+3b+9c=1 \\ 4a-2b+c=4 \\ 9a-6b+4c=9 \end{cases}$$

On observe (ce n'est pas obligatoire) que, en posant $\alpha = a-1$ le système équivaut à :

$$\begin{cases} \alpha+3b+9c=0 \\ 4\alpha-2b+c=0 \\ 9\alpha-6b+4c=0 \end{cases}$$

qui est un système homogène, donc si le déterminant de ses coeffs. est $\neq 0$ alors la seule sol. est : $(\alpha,b,c)=(0,0,0)$

Or :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & 1 \\ 9 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -14 & -35 \\ 0 & -33 & 77 \end{vmatrix} = -7\cdot 11\cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$$

Donc $a-1=\alpha=0=b=c$ est l'unique solution donc $a=1$ et $b=c=0$, et comme $R=aX^2+bX+c$ on trouve $R=1\cdot X^2+0\cdot X+0=X^2$, c'est à dire le reste R_2 obtenu par calcul direct à la question (b).

EXERCICE 2 : ① On sait que $|\sin x|\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ donc $\left|\frac{\sin(n^2)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ d'où $\frac{\sin(n^2)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Alors

$$u_n = \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{\sin(n^2)}{n}\right)}{\cancel{n}\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1+0}{\sqrt{3+0}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

② On multiplie par le conjugué de la différence :

$$v_n = \sqrt{2n}\cdot\frac{(\cancel{n^3}+n+\cancel{1}) - (\cancel{n^3}+\cancel{1})}{\sqrt{n^3+n+1}+\sqrt{n^3+1}} = \frac{\sqrt{2}\,\cancel{n\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n^3}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}$$

d'où :

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

EXERCICE 3 : ⓐ On utilise $|\sin x|\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ dans :

$$|u_n| \leq \frac{|\sin(1)|+|\sin(2)|+\dots+|\sin(n)|}{n\ln(n)} \leq \frac{1+\dots+1}{n\ln(n)} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\ln(n)}$$

donc

$$|u_n| \leq \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{d'où} \quad u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(Bien entendu, ci-dessus on a supposé $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$)

ⓑ

$$\begin{aligned} S_n &:= r+r^2+\dots+r^n \\ rS_n &= \quad\; r^2+\dots+r^n+r^{n+1} \end{aligned}$$

et par soustraction :

$$(r-1)S_n = r^{n+1}-r \underset{r\neq 1}{\Longrightarrow} S_n = r\,\frac{r^n-1}{r-1}$$

ⓒ $\sum_{k=1}^{n} e^{ik} = \sum_{k=1}^{n} (e^{i})^k$ donc en prenant $r=e^{i}$ on déduit de (b) :

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik} = e^{i}\,\frac{e^{in}-1}{e^{i}-1} = e^{i}\,\frac{e^{i\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n}{2}}-e^{-i\frac{n}{2}}\right)/2i}{e^{i/2}\left(e^{i/2}-e^{-i/2}\right)/2i} =$$

$$= \underbrace{e^{i/2}\cdot e^{in/2}}_{e^{i\frac{n+1}{2}}}\;\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \left(\text{car } \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

Puis, en tenant compte de $\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}(\alpha_k)$ ($\alpha_k\in\mathbb{C}$, $k=1,\dots,n$) on obtient :

$$\sin(1)+\sin(2)+\dots+\sin(n) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right) \overset{\text{calcul précédent}}{=}$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n+1}{2}}\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}}_{\in\mathbb{R}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\,\underbrace{\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n+1}{2}}\right)}_{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

d'où

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cdot n\ln(n)}$$

ⓓ $|v_n| = |\ln(n)\,u_n| \leq \frac{1\cdot 1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cdot n} \to 0$ et $|w_n| \leq \frac{1\cdot 1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\ln(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

EXERCICE 4

(a) x est pt. fixe de f ssi $x = f(x)$. Donc ssi :

$$x = x^2 - 3x + 3 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x(x-1) - 3(x-1) = 0$$
$$\iff (x-1)(x-3) = 0$$

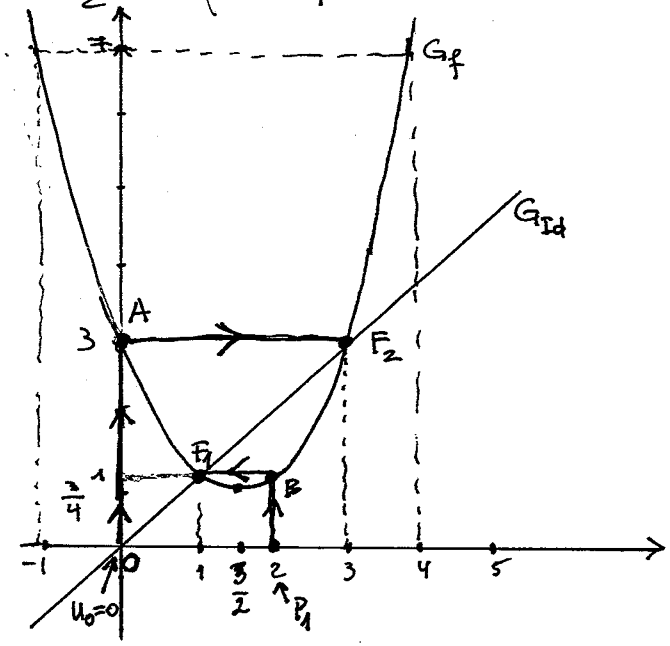
Donc les points fixes de f sont 1 et 3.

(b) $f(x) = 0 \iff x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$f(0) = 3 > 0$. Donc G_f = graphe de f est une parabole située entièrement au-dessus de Ox.

$f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ pt de minim.

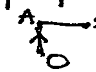
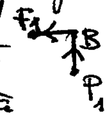
$f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}$. Donc G_f est symétrique par rapport à la verticale $x = \frac{3}{2}$, et passe par $(0,3)$ et $(3,3)$.



(c) 1 et 3 sont des points fixes, donc lorsque le premier terme est 1 ou 3, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En effet, soit l pt fixe de f, donc $l = f(l)$. Si $u_0 = l$ alors $u_1 = f(u_0) = f(l) = l$ et, par recurrence, si $u_n = l$ alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(l) = l$ donc $u_0 = u_1 = \ldots = u_n = u_{n+1} = \ldots = l$ donc $u_n = l$ $\forall n$.

Dans ces cas la toile d'araignée se réduit au pt. $(l,l) \in \mathbb{R}^2$, donc si $u_0 = 1$ alors elle sera le pt. $(1,1)$ et si $u_0 = 3$, le pt. $(3,3)$.

(d) $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = 3$ = pt fixe ; $u_0 = 2 \Rightarrow u_1 = 1$ = pt. fixe

Si $u_0 = 0$, la toile est  ; si $u_0 = 2$, la toile est 

Dans ce cas les suites deviennent constante à partir du rang $n = 1$, donc elles sont convergentes : si $u_0 = 0$, vers $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$ et si $u_0 = 2$, vers $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

(e) Obs : $f(-1) = f(4) = 7$. c'est pourquoi dans les 2 cas $u_0 = -1$ et $u_0 = 4$ les toiles d'araignée se rencontrent en **C** après quoi elles poursuivent un chemin commun par les pts D, E, F...

Donc la toile d'araignée dans ces 2 cas semble ne pas être bornée d'où on soupçonne une divergence $u_n \to +\infty$