L1 MIPI - SESSION 2 - 15.06.2017

Examen de Polynômes et Suites

Durée: 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables INTERDITS.
Les questions marquées d'une étoile " $\star$ " et signalées en marge par "▶" **sont hors barème.**

Questions et applications du cours.

1) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la **définition** de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

2) Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

a) Le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Le polynôme $X^4 + i$ a les racines deux à deux complexes conjuguées.

c) Si la suite u est strictement croissante et $1 < u_n \leq 2$ pour tout n alors $u_n \to 2$ lorsque $n \to \infty$.

d) Si $u_n \to 0$ pour $n \to \infty$, alors la série $\sum u_n$ converge.

e) De toute suite réelle on peut extraire une sous-suite convergente.

Exercice 1. Soit $P = 6X^3 + 20X^2 + 11X - 6$, $Q_1 = 3X^2 + 5X - 2$ et $Q_2 = 2X + 3$.

a) Calculer les polynômes somme $S = Q_1 + Q_2$ et produit $T = Q_1 \cdot Q_2$.

b) Effectuer les divisions euclidiennes de P par S, puis de P par T.

c) Calculer les racines du polynôme T.

▶ **d)** * Retrouver le reste de la division de P par T effectuée à (b), en utilisant juste le théorème de division euclidienne et les racines trouvées à la question précédente.

Exercice 2. Calculer (en justifiant les étapes) les limite des suites de terme général:

1) $u_n = \dfrac{n + \sin(n^2)}{\sqrt{3n^2 + 2}}$

2) $v_n = \sqrt{2n}(\sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 + 1})$. [Indication: multiplication par l'expression conjuguée]

Exercice 3. Soit les suites u, v, w de termes généraux $u_n = \dfrac{\sin(1) + \ldots + \sin(n)}{n \ln(n)}$, $v_n = u_n \cdot \ln(n)$ et $w_n = n \cdot u_n$.

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. [Indication: majorer $|u_n|$ convenablement]

b) Soit, pour $r \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $S_n = \sum_{k=1}^n r^k$. Montrer que $S_n = r\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$.

▶ **c)** * En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{ik} = \mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}} \frac{\sin(\frac{n}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$, puis que: $u_n = \dfrac{\sin(\frac{n}{2})\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2}) n \ln(n)}$.

d) En déduire que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0 = \lim_{n\to\infty} w_n$.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est définie par: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 3$.

a) Montrer que les points fixes de f sont 1 et 3.

b) Étudier brièvement f et tracer son graphe ainsi que celui de la première bissectrice sur un repère orthogonal xOy (l'unité conseillée: 1,5 cm)

c) Préciser la nature de la suite $(u_n)_n$ dans les cas où son premier terme u_0 vaut soit 1 soit 3. Argumenter brièvement votre réponse et dire quelle est sa toile d'araignée dans ces cas.

d) Calculer les premiers 3 termes de la suite $(u_n)_n$ dans les deux cas suivants: $u_0 = 0$ et $u_0 = 2$. En déduire la nature de $(u_n)_n$ et dessiner sa toile d'araignée dans ces deux cas.

e) Représenter sur une même figure (mais avec des couleurs différentes) les toiles d'araignée correspondant aux cas: $u_0 = -1$, $u_0 = 4$.
Quel semble être le comportement de $(u_n)_n$ dans ces deux cas? (on ne demande pas d'établir rigoureusement la nature de la convergence de la suite, mais simplement commenter la toile d'araignée obtenue)