L1 MIPI
Juin 2016

Examen de Polynômes et Suites

Durée: 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables INTERDITS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barême suivant est donné à titre <u>indicatif</u> : $3+4+3+3+7=20$.

Exercice 1.
a) Déterminer les racines carrées complexes de $Z=-2i$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(3+i)z+2+2i=0$.

Exercice 2. Pour $a, b \in \mathbb{R}^2$ on considère le polynôme $P=aX^4+bX^3+1$.
a) A quelle condition sur a et b le nombre 1 est-il racine de P?
b) Calculer $P'(1)$. En déduire que 1 est racine double de P si et seulement si $a=3$ et $b=-4$.
c) En déduire la factorisation de $3X^4-4X^3+1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On justifiera soigneusement la réponse.

Exercice 3. Calculer les limites des suites de terme général

$$u_n=\frac{3n+\sqrt{n}}{5n+1} \quad \text{et} \quad v_n=\sqrt{n^2+n}-n.$$

Exercice 4. Soit u la suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=2$.
a) Exprimer en fonction de n la somme $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
b) Justifier que la série $\sum u_n$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Exercice 5. Etant donné $n \geq 2$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x)=x-\cos\left(\frac{x}{n}\right)$.
a) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante.
b) Enoncer le Théorème des valeurs intermédiaires.
c) Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $x_n=\cos\left(\frac{x_n}{n}\right)$.
d) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ on a $\cos\left(\frac{x}{n}\right) < \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$.
e) Montrer que $f_{n+1}(x_n) < 0$ et en déduire que la suite $(x_n)_n$ est strictement croissante.
f) Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge, puis que sa limite est 1.