L1 MIPI
19 Mai 2016

Examen de Polynômes et Suites

Durée: 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables INTERDITS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barême suivant est donné à titre indicatif : $3+2+2+4+4+5=20$**.**
La Feuille Annexe est A RENDRE AVEC LA COPIE

Questions de cours.

1) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la **définition** de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

2) Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

a) Le polynôme X^4+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
b) Si la suite u est décroissante et $u_n \geq 0$ pour tout n alors $u_n \to 0$.
c) Si la suite u est bornée alors elle converge.
d) Si $u_n \to 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 1. Mettre le nombre $Z = -8 + i8\sqrt{3}$ sous forme exponentielle puis déterminer ses racines quatrièmes.

Exercice 2.

a) Calculer les limites des suites de terme général $u_n = \dfrac{2n^2 + 3\ln(n)}{5n^2+1}$ et $v_n = \dfrac{\sin(n) - 2\cos(n)}{n}$. Justifiez!

b) Montrer que la suite de terme général $w_n = \dfrac{(-1)^n \times n}{n+1}$ n'a pas de limite.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction dont le graphe est donné **sur la feuille Annexe**.

a) À l'aide du graphe déterminer, en expliquant votre réponse, les points fixes de f. Pour chacun d'entre eux on pourra donner une valeur approchée.

b) Représenter graphiquement (sur la feuille Annexe) les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 de la suite lorsque $u_0 = 1$. On prend cette fois $u_0 = 6$, représenter graphiquement les termes u_0, u_1, u_2 et u_3.

c) On prend maintenant $u_0 = 7$. Représenter graphiquement les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4. La suite $(u_n)_n$ est-elle croissante?

d) Donner une valeur de u_0 telle que la suite $(u_n)_n$ tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

TSVP

Exercice 4. Soient u, v et w les suites définies pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad v_n = u_n - 2\sqrt{n}, \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

a) Justifier que pour tout entier $k \leq n$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{n}$ et déterminer la limite de la suite u.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Indication: pensez à la quantité conjuguée.

c) En utilisant la question précédente montrer que la suite v est décroissante et que la suite w est croissante.

d) En déduire que les suites v et w convergent vers une même limite. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

Exercice 5. Le but de l'exercice est de factoriser le polynôme

$$A = 4X^5 - 8X^4 + X^3 - 23X^2 - 60X + 36.$$

en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

1) Soit $B = 2X^3 - 3X^2 - 7X - 6$.

- **a)** Effectuer la division euclidienne de A par B. On notera par la suite R le reste de cette division.
- **b)** On suppose que A et B possèdent une racine commune. On notera α cette racine. Montrer que α est aussi racine de R, et en déduire la valeur de α.
- **c)** Déterminer le polynôme Q tel que $A = (X - \alpha)Q$.

2) On suppose de plus que A possède au moins une racine imaginaire pure.

- **a)** Justifier que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de A alors $\bar{z}$ est aussi racine de A. Combien de racines imaginaires pures le polynôme A a-t-il donc au minimum?
- **b)** Justifier que si $z \neq \alpha$ est racine de A alors z est aussi racine de Q.
- **c)** Déterminer les racines imaginaires pures de Q (et donc de A).

3) **a)** Déterminer toutes les racines de A.

- **b)** En déduire la factorisation de A dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Numéro de copie :
L1 MIPI
19 Mai 2016

Examen de Polynômes et Suites : Feuille Annexe