L1-S1 : Année 2015-2016 SESSION 2

CORRIGÉ de l'EXAMEN "Polynômes & Suites" du 13.06.2016

EXERCICE 1 : ⓐ $Z=-2i=2e^{-i\pi/2}$. Alors l'équation $z^2=Z$ a les racines $z_{\substack{1\\2}}=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{2}\right)}$, $k=0,1$

d'où $z_0=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}=1-i$ et $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=-(1-i)=-z_0$

(... et ça se passe tjs. ainsi, ce qui justifie l'obs à la fin du ⓑ).

ⓑ Le discriminant de l'éq. donnée est $\Delta=(3+i)^2-8(1+i)=Z$

Donc $\Delta=Z=-2i$ (du pt. (a)) et une de ses racines est $z_0=1-i$. On a alors les rac. de l'éq. du (b) :

$$z_\pm=\frac{(3+i)\pm z_0}{2}=\begin{cases} \nearrow z_+=2\\ \searrow z_-=1+i\end{cases}$$

Obs : peu importe si on avait pris z_1 au lieu de z_0 : ça donne tjs pareil)

EXERCICE 2 : ⓐ $P(1)=0 \iff \boxed{a+b+1=0}$

ⓑ $P'(X)=4aX^3+3bX^2 \Rightarrow P'(1)=4a+3b$

1 est racine (au moins) double de P ssi $P(1)=P'(1)=0$ i.e. ssi $a+b=-1$ et $4a+3b=0$. C'est un syst. de Cramer, donc solution unique : $(a,b)=(3,-4)$.

ⓒ Soit on écrit $P(x)=3(X-1)^2(X^2+\alpha X+\beta)$ et on l'identifie à P donné (tenant compte du fait que $\{1,X,X^2,X^3,X^4\}$ est syst. libre) pour obtenir un syst. (de Cramer forcément, car factorisation de P sur $\mathbb{R}$ unique !) en inconnues α et β...

... Soit on fait la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^2$! On obtient le quotient $Q(X)=3X^2+2X+1$ dont les racines sont purement complexes,

donc Q est irréductible sur $\mathbb{R}$. Conclusion :

$P(X)=(X-1)^2(3X^2+2X+1)$ est la factorisation sur $\mathbb{R}$ de P.

EXERCICE 3 : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\cancel{n}\left(5+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{5}$

$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\cancel{n^2}+n)-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$

EXERCICE 4 : ⓐ $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}2\left(\frac{1}{3}\right)^k=2\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k=2\,\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}$

d'où $S_n=3\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

ⓑ Par les théorèmes généraux (somme, produit) $\{S_n\}$ est suite cvgte quand $n\to\infty$. On a :

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=3-0=3=\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k$

EXERCICE 5 : ⓐ $\forall n\geq 2$, $f_n\in C^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$f_n'(x)=1+\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Or, par hyp : $0\leq x\leq 1$, d'où $0\leq\frac{x}{n}\leq\frac{1}{n}\underset{(n\geq 2)}{\leq}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}$ d'où $0\leq\sin\left(\frac{x}{n}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

donc $f_n'(x)\geq 1>0$, d'où $f_n\nearrow$ strict. sur $[0,1]$.

ⓑ Si f continue sur $\mathbb{R}$ et si $I=$ intervalle de $\mathbb{R}$ alors $f(I)$ est également un intervalle de $\mathbb{R}$.

ⓒ $\forall n\geq 2$, $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ est continue, on a $f(0)=-1$, $f(1)=1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)>0$ $\forall n$ donc

$0 \in]f_n(0), f_n(1)[$ a, cf. th. des valeurs intermédiaires, au moins un antécédent dans $]0,1[$. Par l'énoncé, celui-ci est noté x_n : en effet, on a $f_n(x_n) = 0$ i.e. $x_n = \cos\left(\frac{x_n}{n}\right)$.

L'unicité de x_n est assurée par l'injectivité de f_n (donnée par le fait qu'elle est $\nearrow$ strictement)

(d) cos est strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$, d'où :

$$0 < x_n < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x_n}{n+1} < \frac{x_n}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 1 > \cos\left(\frac{x_n}{n+1}\right) > \cos\left(\frac{x_n}{n}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

(e) $$f_{n+1}(x_n) = x_n - \cos\left(\frac{x_n}{n+1}\right) \underset{(c)}{=} \cos\left(\frac{x_n}{n}\right) - \cos\left(\frac{x_n}{n+1}\right) \underset{(d)}{<} 0$$

Aussi, par la déf. de x_{n+1} : $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, d'où $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. Or, on sait que f_{n+1} est strictement croissante, donc on ne peut avoir que $x_n < x_{n+1}$ i.e. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$ strictement croissante.

(f) On a vu à (c) qu'il $\exists x_n \in]0,1[$ $\forall n \geq 2$ et à (e) que $\{x_n\}_{n \geq 2}$ est une suite strictement croissante. Donc $\{x_n\} \nearrow$ et bornée sup. par $1 \Rightarrow \{x_n\}$ est convergente et sa limite l vérifie : $l = \cos\left(l \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 1$ (car cos est continue)

Donc $x_n \nearrow 1$, $n \to \infty$.