L1 MIPI
15 Juin 2015

Examen de 2nde session de Polynômes et Suites

Durée: 2h. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables INTERDITS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barême suivant est donné à titre <u>indicatif</u> : $3 + 5 + 3 + 4 + 5 = 20$.

Questions de cours.
a) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Rappeler la **définition** de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
b) Enoncer le théorème des suites monotones.

Exercice 1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le polynôme $P(X) = X^4 + 3X^3 + aX^2 + 3X + b$.
a) A quelle condition sur (a, b) le nombre -1 est-il racine du polynôme P?
b) Calculer P'. Montrer que -1 est racine double de P si et seulement si $a = 4$ et $b = 1$.
c) En déduire la factorisation en produits de facteurs irréductibles de $X^4+3X^3+4X^2+3X+1$ dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$. Indication: on pourra effectuer la division euclidienne de $X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$ par $(X + 1)^2 = X^2 + 2X + 1$.

Exercice 2.
a) Calculer les limites des suites de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n) + 2}{3 \ln n + 1}$ et $v_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n + 1}$. Justifiez!
b) Montrer que la suite de terme général $w_n = \dfrac{(-1)^n \times n^2}{n + 1}$ n'a pas de limite.

Exercice 3. Soient u et v les suites de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{4^n}$ et $v_n = \dfrac{n}{4^n}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

a) Montrer que $\dfrac{1}{4} S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{j - 1}{4^j}$.
b) En déduire que $S_n - \dfrac{1}{4} S_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3n + 4}{3 \times 4^{n+1}}$.
c) Montrer que la série $\sum v_n$ converge et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
d) Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? Justifiez.

TSVP

Exercice 4. On souhaite étudier, en fonction des valeurs de u_0, la suite définie par récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, \qquad u_0 \geq -6.$$

a) Donner la fonction f définie sur $[-6, +\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq -6$.

b) Déterminer le ou les point(s) fixe(s) de la fonction f.

c) Etudier rapidement la fonction f (dérivée, sens de variation, limite en $+\infty$) et tracer son graphe.

d) Représenter à l'aide d'une toile d'araignée les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 pour chacune des valeurs de u_0 suivantes: 0, 3 et 6.

e) Etudier la suite $(u_n)_n$ lorsque $u_0 = 3$.

Dans toute la suite on supposera que $u_0 < 3$.

f) Montrer que $u_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.

h) En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.