Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L1 Calculus.

Examen session 2 2018-2019

1 heure et 30 minutes

Les documents et les objets connectés sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. : (2 pts) Donner les primitives de $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^2}$. *La fonction est de la forme $u'u^\alpha$ avec $\alpha = -2$, et une primitive est de la forme $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$. Ici une primitive quelconque F s'écrit, pour $c \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{-1}{x^2+3x+1} + c$.*

Exercice 2. : (12 pts) Trouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation

$$\frac{x^2+x+\frac{5}{4}}{x^3+x^2+\frac{5}{4}x+1}y' + y = \frac{x^2+x+\frac{5}{4}}{(x^3+x^2+\frac{5}{4}x+1)(x+\sqrt{x})}e^{-\frac{x^2}{2}-\arctan(x+\frac{1}{2})}$$

Normalisation (2 pt)

*La fonction $\frac{x^2+x+\frac{5}{4}}{x^3+x^2+\frac{5}{4}x+1}$ ne s'annule pas pour $x > 0$, en effet on a d'un côté que $x^2+x+\frac{5}{4} \geq \frac{5}{4} > 0$ donc cette fraction est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et ensuite $x^3+x^2+\frac{5}{4}x+1 \geq 1 > 0$ donc la fraction ne s'annule pas. **(1 pt)**. On peut donc normaliser, on va chercher à résoudre **(0,5 pt)***

$$y' + \frac{x^3+x^2+\frac{5}{4}x+1}{x^2+x+\frac{5}{4}}y = \frac{1}{x+\sqrt{x}}e^{-\frac{x^2}{2}-\arctan(x+\frac{1}{2})} \tag{1}$$

*et on résoud d'abord l'équation homogène associée **(0,5 pt)***

$$y' + \frac{x^3+x^2+\frac{5}{4}x+1}{x^2+x+\frac{5}{4}}y = 0$$

Résolution de l'équation homogène (5,5 pt)

*On sait que les solutions s'écrivent, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, sous la forme λe^{-A} avec A une primitive quelconque de $\frac{x^3+x^2+\frac{5}{4}x+1}{x^2+x+\frac{5}{4}}$ **(0,5 pt)**.*

*On effectue une division euclidienne et on trouve $x^3+x^2+\frac{5}{4}x+1 = x(x^2+x+\frac{5}{4})+1$ **(0,5 pt)**, ainsi on doit trouver les primitives de **(0,5 pt)***

$$\frac{x^3+x^2+\frac{5}{4}x+1}{x^2+x+\frac{5}{4}} = \frac{x(x^2+x+\frac{5}{4})+1}{x^2+x+\frac{5}{4}} = x + \frac{1}{x^2+x+\frac{5}{4}} .$$

*Cherchons une primitive de $\frac{1}{x^2+x+\frac{5}{4}}$. On a **(1 pt)***

$$x^2+x+\frac{5}{4} = (x+\frac{1}{2})^2+1$$

et en posant $u(t) = t + \frac{1}{2}$, $u'(t) = 1$, par la formule de changement de variable on a

$$\int^x \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+1}dt = \int^x \frac{u'(t)}{u(t)^2+1}dt = \int^{u(x)} \frac{1}{t^2+1}dt$$

(1 pt) *ce qui est égal à l'ensemble des fonctions de la forme, pour $c \in \mathbb{R}$,* $\arctan(u(x))+c = \arctan(x+\frac{1}{2})+c$. ***(0,5 pt)****. Donc l'ensemble S_0 des solutions de l'équation homogène est* ***(1 pt)***

$$S_0 = \{y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} | y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}-\arctan(x+\frac{1}{2})}, \lambda \in \mathbb{R}\} \ .$$

Recherche d'une solution particulière (3,5 pt)

On va utiliser la méthode de variation de la constance, c'est-à-dire qu'on cherche une solution particulière de l'équation de départ de la forme $y_1(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, avec $A(x) = \frac{x^2}{2} + \arctan(x+\frac{1}{2})$, et λ une fonction à trouver ***(0,5 pt)****. En mettant $y_1(x)$ dans (1), on trouve*

$$\lambda'(x)e^{-A(x)} = \frac{1}{x+\sqrt{x}}e^{-A(x)}$$

donc on doit résoudre ***(1 pt)***

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}} \ .$$

On calcule, avec le changement de variable $u(t) = \sqrt{t}$, $u'(t) = \frac{1}{2u(t)}$ ***(0,5 pt)****, pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $x > 0$*

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{t+\sqrt{t}}dt &= \int^x \frac{2u(t)}{u^2(t)+u(t)}u'(t)dt \\ &= 2\int^{u(x)} \frac{t}{t^2+t}dt = 2\int^{u(x)} \frac{1}{t+1}dt \\ &= 2\ln(1+u(x)) + c = 2\ln(1+\sqrt{x}) + c\end{aligned}$$

(1 pt)*. Au final, une solution particulière de l'équation est* ***(0,5 pt)***

$$y_1(x) = 2\ln(1+\sqrt{x})e^{-\frac{x^2}{2}-\arctan(x+\frac{1}{2})} \ .$$

Conclusion (1 pt) *L'ensemble S des solutions de l'équation est*

$$S = \{y : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R} | y(x) = (2\ln(1+\sqrt{x}) + \lambda)e^{-\frac{x^2}{2}-\arctan(x+\frac{1}{2})}, \lambda \in \mathbb{R}\} \ .$$

Exercice 3. : (6 pts)

1. Soit $f(x,y) = \sin(x^2y)$. Donner le domaine de définition de f **(0,5 pt)** ainsi que ses dérivées partielles **(0,5 pt)+(0,5 pt)**. *Le domaine de définition est* $\mathbb{R}^2$*.* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy\cos(x^2y)$*,* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(x^2y)$*.*
2. Donner le graphe de f.**(1 pt)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sin(x^2y)\}$
3. Soit $g(x,y) = \cos(\sin(x^2y))$. Donner les dérivées partielles de g **(0,5 pt)+(0,5 pt)**. $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2xy\cos(x^2y)\sin(\sin(x^2y))$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -x^2\cos(x^2y)\sin(\sin(x^2y))$.
4. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = \frac{x}{(x+y)^2}$. Donner les points critiques de h **(2,5 pt)**. *On a* $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{y-x}{(x+y)^3}$ ***(0,5pt)*** *et* $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{(x+y)^3}$ ***(0,5pt)****. Les points critiques satisfont* $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right.$ ***(0,5pt)*** *c'est-à-dire* $\left\{\begin{array}{l}\frac{y-x}{(x+y)^3}=0\\ \frac{-2x}{(x+y)^3}=0\end{array}\right.$ *Ce système n'a pas de solutions sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ***(1pt)****.*

Fin de l'épreuve.