Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L1 Calculus.

Examen session 1 2018-2019

2 heures

Les documents ainsi que tout objet connecté sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. : (2 pts)

1. **(1 pts)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner la définition de *"f admet une primitive sur* $\mathbb{R}$*"*. *Il existe une fonction* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dérivable* ***(0,5 pt)*** *telle que* $F' = f$ ***(0,5 pt).***
2. **(1pt)** Pour une fonction continue $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donner toutes les solutions de l'équation $y' + ay = 0$. *On donne directement la formule* $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$*, avec* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* A *une primitive quelconque de* a*. Aucun point n'est donné en présence de* y'/y*.*

Exercice 2. : (6,5 pts)

1. **(1 pts)** Donner toutes les primitives de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+7)^3}$.
   $f(x)$ *est de la forme* $u'u^\alpha$ *avec* $\alpha = -3$*, ainsi une primitive est* $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$ *c'est-à-dire ici une primitive de* f *est* $F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x+7)^2}$ ***(0,5pt)****. Donc toutes les primitives de* f *sont les fonctions qui s'écrivent, pour* $c \in \mathbb{R}$*,* $F + c$ ***(0,5pt).***
2. **(1 pt)** Donner le résultat de la division euclidienne de $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ par $1 + x^2$.
   On a $2x^3 + x^2 + 2x + 1 = (1 + x^2)(2x + 1)$*. On ne donne pas tous les points si cette décomposition n'apparaît pas clairement après le calcul.*
3. **(4,5 pts)** À l'aide de la méthode de variation de la constante, donner une solution particulière de l'équation

$$(1 + x^2)y' + y = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x + 7)^3} e^{-\arctan(x)} .$$

D'abord on normalise ***(0,5 pt)****, ce qui ne pose aucun problème car* $1 + x^2$ *ne s'annule pas. Par la question précédente, on doit donc trouver une solution de l'équation* ***(0,5 pt)***

$$y' + \frac{1}{1+x^2}y = \frac{2x+1}{(x^2+x+7)^3} e^{-\arctan(x)} . \tag{1}$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $y(x) = \lambda e^{-\arctan(x)}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$ ***(1 pt)****, ainsi je vais chercher une solution particulière de la forme* $y(x) = \lambda(x)e^{-\arctan(x)}$*, c'est la méthode de variation de la constante* ***(0,5 pt)****. Je calcule* ***(0,5 pt)***

$$y'(x) = \lambda'(x)e^{-\arctan(x)} - \frac{\lambda(x)}{1+x^2}e^{-\arctan(x)}$$

et en remplaçant dans (1), *je trouve*

$$\lambda'(x)e^{-\arctan(x)} = \frac{2x+1}{(x^2+x+7)^3}e^{-\arctan(x)}$$

c'est-à-dire ***(0,5 pt)***

$$\lambda'(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+7)^3}$$

et par la première question on peut prendre ***(0,5)***

$$\lambda(x) = \frac{-1}{2(x^2+x+7)^2} \ .$$

Au final, une solution particulière de l'équation est ***(0,5 pt)***

$$y(x) = \frac{-1}{2(x^2+x+7)^2}e^{-\arctan(x)} \ .$$

Exercice 3. : (5 pts)

1. **(3 pts)** Avec un changement de variable, calculez, pour $x > 0$, $\int^x \frac{1}{\sqrt{t}+1}dt$. *On va poser* $u(t) = \sqrt{t}$, *ainsi* $u'(t) = \frac{1}{2u(t)}$ ***(0,5pt)****. Par la formule de changement de variable*

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{t}+1}dt = \int^x \frac{1}{u(t)+1}2u(t)u'(t)dt = 2\int^{\sqrt{x}} \frac{t}{t+1}dt$$

(1pt, donné en entier ssi la formule est totalement correcte)*. En utilisant* $\frac{t}{t+1} = \frac{t+1-1}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$ ***(0,5pt)****, on a finalement, pour tout* $C \in \mathbb{R}$ ***(0,5pt) pour la constante (0,5)pt pour le calcul correct***

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{t}+1}dt = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C \ .$$

2. **(2 pts)** En faisant une IPP, calculez $\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt$. *La formule d'IPP donne* ***(1pt)***

$$\begin{aligned}\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt &= \ln(x+1)(\frac{x^2}{2}+x) - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{t+1}dt \\ &= \ln(x+1)(\frac{x^2}{2}+x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+2t}{t+1}dt \ .\end{aligned}$$

Une division (ou une mise sous forme carrée) ***(0,5pt)*** *donne que* $t^2+2t = (t+1)^2-1$, *ainsi* ***(0,5pt)***

$$\int_0^x \frac{t^2+2t}{t+1}dt = \int_0^x t+1-\frac{1}{t+1}dt = \frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1) \ .$$

Au final, on a ***(1pt)***

$$\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt = \ln(x+1)(\frac{x^2+2x+1}{2}) - \frac{x^2+2x}{4} \ .$$

Attention il n'y a pas de constantes ici!!!

Exercice 4. : (6,5 pts) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 4y^2 - 4xy - 2x \ .$$

1. **(1pt)** En étudiant la fonction $x \mapsto f(x,x)$, dire si la fonction f peut admettre un extremum global. *$f(x,x) = -2x$ et cette fonction tend vers $-\infty$ quand $x \to +\infty$ et vers $+\infty$ quand $x \to -\infty$. Ainsi, f n'est ni majorée ni minorée, elle ne peut pas avoir d'extrema globaux.*
2. **(1pt)** Donner les dérivées partielles de f. *$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4y - 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y - 4x$. On ne donne pas tous les points si il manque les "(x,y)". On enlève un point à tout l'exercice en présence de f'.*
3. **(1pt)** Trouver, si ils existent, les points critiques de la fonction f. *Il faut résoudre $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$ **(0,5pt)** c'est-à-dire $\begin{cases} -4y - 2=0 \\ 8y - 4x=0 \end{cases}$ ce qui a pour unique solution le point $(-1, -1/2)$ **(0,5pt)***
4. **(1pt)** Écrire la fonction f comme la différence de deux carrés plus une constante. $4y^2-4xy-2x = (2y-x)^2-x^2-2x = (2y-x)^2-(x^2+2x) = (2y-x)^2-((x+1)^2-1) = (2y-x)^2 - (x+1)^2 + 1.$
5. **(0,25+0,25 pts)** Que vaut la fonction f en $(-1, -1/2)$? Que vaut la fonction $x \mapsto f(x, -1/2)$? $f(-1, -1/2) = 1$. $f(x, -1/2) = 1 + 2x - 2x = 1$.
6. **(2pts)** En déduire que $f(-1, -1/2)$ n'est pas un extremum local de la fonction f. *Par la question précédente, f atteint la valeur $f(-1, -1/2) = 1$ en tout point qui s'écrit sous la forme $(x, -1/2)$. Mais ces points ne sont pas des points critiques, puisque la fonction f n'en a qu'un seul. Donc f n'atteint pas d'extrema local en ces points, car tout extremum local est un point critique. Donc 1 n'est pas un extremum local.*

Exercice 5. : (5,5 pts) Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y'' + 2y' - 3y = 3x^2 + e^x \ .$$

*On résout d'abord l'équation $y''+2y'-3y = 0$ **(0,5pt)**. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r - 3 = 0$ dont les solutions sont -3 et 1 **(0,5pt)**. Ainsi, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $\lambda e^{-3x} + \mu e^x$ **(0,5pt)**. On va séparer les équations à second membre, et d'abord chercher une solution particulière de $y'' + 2y' - 3y = 3x^2$ **(0,5pt)**. Comme $x^2 = 3x^2e^{0x}$ et que 0 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, par le théorème du cours on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$. On a $y'(x) = 2ax + b$ et $y''(x) = 2a$. En remplaçant dans $y'' + 2y' - 3y = 3x^2$, on trouve*

$$-3ax^2 + (4a - 3b)x + 2a + 2b - 3c = 3x^2$$

donc on doit résoudre le système

$$\begin{cases} -3a &= 3 \\ 4a - 3b &= 0 \\ 2a + 2b - 3c &= 0 \end{cases}$$

(0,5pt) *et on trouve*

$$\begin{cases} a = & -1 \\ b = & -4/3 \\ c = & -14/9 \end{cases}$$

(1pt) *c'est-à-dire* $y(x) = -x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{14}{9}$.

Maintenant je cherche une solution de l'équation

$$y'' + 2y' - 3y = e^x \ .$$

Comme 1 *est une racine simple de l'équation caractéristique, le théorème du cours me dit qu'il faut chercher une solution particulière sous la forme* $y(x) = (ax+b)e^x$*, avec* $y'(x) = (ax+a+b)e^x$*,* $y''(x) = (ax+2a+b)e^x$*. En remplaçant dans l'équation, on a que les termes en* x *s'annulent, et il reste*

$$(2a + b + 2(a+b) - 3b)e^x = e^x$$

c'est-à-dire $4a = 1$ *i.e.* $y(x) = \frac{1}{4}xe^x$ ***(1pt)*** *(remarque : c'est normal de n'avoir aucune condition sur* b*, car pour tout* b*,* be^x *est solution de l'équation homogène associée.)*

Au final, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme, pour λ *et* μ *réels* ***(1pt)***

$$y(x) = \lambda e^{-3x} + \mu e^x - x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{14}{9} + \frac{1}{4}xe^x \ .$$

Exercice 6. : (Bonus, vrai/faux 2 pts) Répondre seulement par vrai/faux, sans justification. Une réponse juste : + 0,5 pt, une réponse fausse : - 0,5 pt, pas de réponse : 0 pt. **La note minimale pour l'exercice est 0**.

1. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre normalisée homogène est un espace vectoriel de dimension 1. *vrai*
2. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre normalisée est un espace vectoriel de dimension 1. *faux*
3. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène est un espace vectoriel de dimension 1. *faux*
4. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est un espace vectoriel de dimension 1. *faux*

Fin de l'épreuve.