Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L1 Calculus.

Examen session 1 2018-2019

2 heures

Les documents ainsi que tout objet connecté sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. : (2 pts)

1. **(1 pt)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner la définition de *"f admet une primitive sur $\mathbb{R}$"*.
2. **(1pt)** Pour une fonction continue $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donner toutes les solutions de l'équation $y' + ay = 0$.

Exercice 2. : (6,5 pts)

1. **(1 pts)** Donner toutes les primitives de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+7)^3}$.
2. **(1 pt)** Donner le résultat de la division euclidienne de $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ par $1 + x^2$.
3. **(4,5 pts)** À l'aide de la méthode de variation de la constante, donner une solution particulière de l'équation

$$(1+x^2)y' + y = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x^2+x+7)^3} e^{-\arctan(x)} \quad .$$

Exercice 3. : (5 pts)

1. **(3 pts)** Avec un changement de variable, calculez, pour $x > 0$, $\int^x \frac{1}{\sqrt{t}+1} dt$.
2. **(2 pts)** En faisant une IPP, calculez $\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt$.

Exercice 4. : (6,5 pts) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 4y^2 - 4xy - 2x \ .$$

1. **(1pt)** En étudiant la fonction $x \mapsto f(x,x)$, dire si la fonction f peut admettre un extremum global.
2. **(1pt)** Donner les dérivées partielles de f.
3. **(1pt)** Trouver, si ils existent, les points critiques de la fonction f.
4. **(1pt)** Écrire la fonction f comme la différence de deux carrés plus une constante.
5. **(0,25+0,25 pts)** Que vaut la fonction f en $(-1, -1/2)$? Que vaut la fonction $x \mapsto f(x, -1/2)$?
6. **(2pts)** En déduire que $f(-1, -1/2)$ n'est pas un extremum local de la fonction f.

Exercice 5. : (5,5 pts) Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y'' + 2y' - 3y = 3x^2 + e^x \ .$$

Exercice 6. : (Bonus, vrai/faux 2 pts) Répondre seulement par vrai/faux, sans justification. Une réponse juste : + 0,5 pt, une réponse fausse : - 0,5 pt, pas de réponse : 0 pt. **La note minimale pour l'exercice est 0**.

1. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre normalisée homogène est un espace vectoriel de dimension 1.
2. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre normalisée est un espace vectoriel de dimension 1.
3. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène est un espace vectoriel de dimension 1.
4. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est un espace vectoriel de dimension 1.

Fin de l'épreuve.