Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L1 Calculus.

Examen session 2 2017-2018

1 heure et 30 minutes

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. : (2 pts) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a,b,c : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues. On considère l'équation (E) d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ donnée par $ay' + by = c$. Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses, sans justification. Réponse correcte : +0,5 points, réponse incorrecte : -0,5 point, pas de réponse : 0 points. La note minimale pour l'exercice est 0.

1. (E) a toujours une solution. *faux*
2. Si a ne s'annule pas et $c = 0$, (E) a toujours une solution. *vrai*
3. Si a ne s'annule pas, (E) a toujours une solution. *vrai*
4. si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E). *faux*

Exercice 2. : (7 pts) Sur $]0, +\infty[$ on considère $I(x) = \int^x \frac{(1+t^4)t}{1+t^6}\mathrm{d}t$. Effectuer le changement de variable donné par la fonction C^1 définie par $u(t) = t^2$. Calculer I.

Nota Bene : Une rédaction soignée est de rigueur. Notamment, on n'hésitera pas à décomposer les calculs en plusieurs sous-calculs. *On va poser $u(t) = t^2$, on a $u'(t) = 2t$. Ainsi, par la formule de changement de variable,*

$$\int^x \frac{(1+t^4)t}{1+t^6}dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{(1+u(t)^2)u'(t)}{1+u(t)^3}dt = \frac{1}{2}\int^{x^2} \frac{1+t^2}{1+t^3}dt \ .1pt$$

+0,5 pt si le changement de variable est effectué de cette façon -1 est une racine de $1+t^3$, et une division euclidienne donne $1 + t^3 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$, et $t^2 - t + 1$ n'a pas de racines réelles. On calcule

$$\frac{1+t^2}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{1+t} + \frac{t+1}{1-t+t^2}\right) \ .1pt$$

On a

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{6}\int^{x^2} \frac{2}{1+t}dt + \frac{1}{6}\int^{x^2} \frac{t+1}{1-t+t^2}dt \\ &= \frac{1}{3}\ln(1+x^2) 0{,}5pt + \frac{1}{6}I_1(x) \ . \end{aligned}$$

On a

$$I_1(x) = \int^{x^2} \frac{t+1}{1-t+t^2}dt = \frac{1}{2}\int^{x^2} \frac{2t+2}{1-t+t^2}dt = \frac{1}{2}\int^{x^2} \frac{2t-1}{1-t+t^2} + \frac{3}{1-t+t^2}dt \ .$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1-x^2+x^4) + \frac{3}{2}\int^{x^2} \frac{1}{1-t+t^2}dt \ .1pt$$

Aussi, $1-t+t^2 = (t-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}((\frac{2t-1}{\sqrt{3}}) + 1)$, *et avec un changement de variable classique, on a* $\int^{x^2} \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C, C \in \mathbb{R}$ *1pt. À la fin,*

$$I(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x^2) + \frac{1}{12}\ln(1-x^2+x^4) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C, C \in \mathbb{R} \ .$$

+1 si le résultat est exact à la fin +1 pour la présence des constantes

Exercice 3. : (6 pts) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' + 2y' + y = x\sinh(x) \ .$$

(Indication : on pourra utiliser sans démonstration le fait que la fonction $y(x) = \frac{x^3}{6}e^{-x}$ est solution de l'équation $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$) *On résoud d'abord l'équation homogène associée* $y'' + 2y' + y = 0$ *(0,5pt). Son équation caractéristique est* $r^2 + 2r + 1 = 0$ *dont* -1 *est une solution double (0,5pt). On sait alors que les solutions de l'équation homogène sont les* $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{-x}$ *(1pt). On cherche une solution particulière. Comme* $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ *(0,5pt) on va d'abord chercher une solution de* $y'' + 2y' + y = xe^x$ *(0,5pt) pour la superposition. Comme* 1 *n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche la solution sous la forme* $Q(x)e^x$ *avec* Q *de degré* 1*, c'est-à-dire* $Q(x) = ax + b$ *(1pt). En reportant dans* $y'' + 2y' + y = xe^x$ *on trouve* $Q(x) = \frac{1}{4}(x-1)$ *(0,5pt) si calcul juste . Comme l'indication nous donne une solution de* $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$*, alors une solution de* $y'' + 2y' + y = x\sinh(x)$ *est* $y(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}(x-1)e^x - \frac{x^3}{6}e^{-x})$ *(0,5pt) pour la bonne utilisation de l'indication . Au final, l'ensemble des solutions de l'équation de départ est* $\{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | y(x) = (\lambda + \mu x - \frac{x^3}{12})e^{-x} + \frac{1}{8}(x-1)e^x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ *(1pt) le point entier n'est accordé que si l'ensemble est correctement écrit .*

Exercice 4. : (5,5 pts) Soit $f(x,y,z) = z\ln\left(e^{x^2+z} + y\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f. **(1 pt)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | e^{x^2+z} + y \ > 0\}$
2. Donner le graphe de f.**(1 pt)** $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 | t = z\ln\left(e^{x^2+z} + y\right)\}$
3. Donner les dérivées partielles de f **(2,5 pt)** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2zxe^{x^2+z}}{e^{x^2+z}+y}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{z}{e^{x^2+z}+y}, \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \ln\left(e^{x^2+z} + y\right) + \frac{ze^{x^2+z}}{e^{x^2+z}+y}$. *0,75 point pour chaque dérivée correcte + 0,25 point si on a bien* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) =$ *au lieu de* $\frac{\partial f}{\partial x} =$*. On ne donne aucun point pour toute présence de* f'.
4. Montrer que f n'a pas de maximum. **(1 pt)** *Par exemple, quand* x *tend vers* $+\infty$*, alors* $f(x,0,1)$ *tend vers* $+\infty$*, donc la fonction n'est pas majorée, donc elle n'a pas de maximum.*

Fin de l'épreuve.