Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L1 Calculus.

Examen session 1 2017-2018

2 heures

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1. : (2 pts) Répondre seulement par vrai/faux. Une réponse juste : + 0,5 pt, une réponse fausse : - 0,5 pt, pas de réponse : 0 pt. La note minimale pour l'exercice est 0.

1. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.
2. Toute fonction continue sur un intervalle admet une dérivée.
3. Toute fonction qui admet une dérivée sur un intervalle admet une primitive.
4. Toute fonction qui admet une primitive sur un intervalle admet une dérivée.

Exercice 2. : (2 pts)

1. **(0,5 pts)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Donner la définition du graphe de f.
2. **(0,5pt)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Donner la définition de minimum de f.*On ne donne aucun point si le minimum est confondu avec le point en lequel il est atteind.*
3. **(1pt)** Donner la formule de changement de variable pour le calcul de primitives. *Le point entier n'est accordé si toutes les hypothèses sont explicitées, notamment que la fonction de changement de variable u est dérivable.*

Exercice 3. : (3 pts) À l'aide d'une intégration par partie, calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int^x t\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$. *On pose $g'(t) = t$, donc par exemple $g(t) = \frac{1}{2}t^2$, et on pose $f(t) = \ln(1+t^2)$, donc $f'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$. La formule d'IPP est $\int^x f(t)g'(t)d(t) = f(x)g(x) - \int^x f'(t)g(t)dt$ (1pt), on a donc $\int^x t\ln(1+t^2)dt = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \int^x \frac{t^3}{1+t^2}dt$ (0,5pt) et $\int^x \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int^x \frac{t(t^2)}{1+t^2}dt = \int^x \frac{t(t^2-1+1)}{1+t^2}dt = \int^x t - \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{1+t^2}dt = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, $C \in \mathbb{R}$. (1pt) Finalement, $\int^x t\ln(1+t^2)dt = \frac{1}{2}(-x^2 + (1+x^2)\ln(1+x^2)) + C$, $C \in \mathbb{R}$ (0,5pt). (Remarque 1 : on peut aussi faire une division euclidienne pour $\frac{t^3}{1+t^2}$. Remarque 2 : on enlèvera un demi point si il y a une confusion entre x et la variable d'intégration. Remarque 3 : on enlèvera un point si il n'y a pas les constantes à la fin du calcul. Remarque 4 : le calcul est un peu plus simple si, au lieu de prendre $g(t) = \frac{1}{2}t^2$ on prend $g(t) = \frac{1}{2}(1+t^2)$).*

Exercice 4. : (3,25pt) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + 2y + 4$.

1. **(0,5+0,5pt)** Donner les dérivées partielles de f. *$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y + 2$. Remarque : on enlève 1 point sur la copie pour toute présence de $f'(x,y)$.*
2. **(0,25pt+0,25pt)** Donner le gradient de f et un vecteur normal du graphe de f. *$\vec{\mathrm{grad}} f(x,y) = (x+y, x+2y+2)$. $N(x,y) = (\vec{\mathrm{grad}} f(x,y), -1)$. On donne les points si les définitions sont correctes, même si les calculs de la question précédente sont faux.*

3. **(0,25pt+0,5)** Vérifier que le point (0,0,4) appartient au graphe de f, et donner l'équation du plan tangent du graphe de f en ce point (forme cartésienne). *L'équation est* $x\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) - z + f(0{,}0) = 0$ *soit* $2y - z + 4 = 0$.

4. **(1pt)** Donner les points critiques de f. *Il faut résoudre* $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$ *(0,5pt) soit* $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ *ce qui a pour unique solution* $(2, -2)$ *(0,5pt). On ne donnera le point complet que si les calculs des dérivées partielles étaient corrects et que le résultat est correct.*

Problème. (11,5 points)

L'objectif du problème est de trouver (si elles existent) toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$xy' + 2y = \frac{x}{x^2 + x + 1} \ . \tag{1}$$

Rappelons que cela signifie que l'on cherche toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1} \ .$$

1. **Une primitive de** $f(X) = \frac{X^2}{X^2+X+1}$ **(4,5 pts).**

   (a) **(0,5pt)** Décomposer en éléments simples $\frac{X^2}{X^2+X+1}$. *Comme le degré de* X^2 *est égal au degré de* $X^2 + X + 1$, *on doit effectuer une division euclidienne :* $X^2 = (X^2 + X + 1) - (X + 1)$, *ainsi* $\frac{X^2}{X^2+X+1} = 1 - \frac{X+1}{X^2+X+1}$. *Comme* $X^2 + X + 1$ *n'a pas de racine réelle, la décomposition est terminée.*

   (b) **(0,5pt)** Écrire $X^2 + X + 1$ sous la forme $A(U(X)^2 + 1)$, avec A une constante et U une fonction qui sont à déterminer. $X^2 + X + 1 = (X + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (X + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}((\frac{2}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1)$.

   (c) **(0,5pt)** Donner une primitive de $\frac{1}{X^2+X+1}$ sur $\mathbb{R}$. *On trouve* $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2X+1}{\sqrt{3}}\right)$. *C'est fait dans le cours. Le demi-point n'est accordé que si le calcul est correct.*

   (d) **(1pt)** En écrivant $\frac{X+1}{X^2+X+1} = \frac{1}{2}\frac{2X+1}{X^2+X+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{X^2+X+1}$, déduire des questions précédentes toutes les primitives de la fonction f. *On a :* $f(X) = \frac{X^2}{X^2+X+1} = 1 - \frac{X+1}{X^2+X+1} = 1 - \frac{1}{2}\frac{2X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2+X+1}$. *On remarque que* $\frac{2X+1}{X^2+X+1}$ *est de la forme* $\frac{U'}{U}$, *donc une primitive est* $\ln(X^2 + X + 1)$, *les primitives de* f *sont les fonctions* $X - \frac{1}{2}\ln(X^2 + X + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2X+1}{\sqrt{3}}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

   (e) **(0,5pt)** Donner la primitive F de f qui s'annule en 0. *La valeur en* 0 *de* $X \mapsto X - \frac{1}{2}\ln(X^2 + X + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2X+1}{\sqrt{3}}\right)$ *est* $-\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, *donc* $F(x) = X - \frac{1}{2}\ln(X^2 + X + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2X+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(f) **(0,25+0,25+0,5+0,5pt)** Calculez $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ et $F'''(0)$. *Par définition, $F(0)=0$, et $F'(0)=f(0)=0$. On calcule $F''(X)=f'(X)=\frac{X^2+2X}{(X^2+X+1)^2}$, donc $F''(0)=0$. Et $F'''(X)=f''(X)=\frac{-2X^3-6X^2+2}{(1+X+X^2)^3}$, et $F'''(0)=2$.*

2. **Résolution sur les x positifs (3,5 pts)** On va chercher les solutions de (1) sur $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

(a) **(0,25+0,25 pt)** Écrire (1) sous sa forme normalisée, et écrire l'équation homogène associée.

(b) **(1pt)** Donner l'ensemble S_0^+ des solutions de l'équation homogène associée sur $\mathbb{R}_+^*$. *On cherche l'ensemble des solutions de $y'+\frac{2}{x}y=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Un primitive de $-\frac{2}{x}$ est $\ln(1/x^2)$. On sait alors que $S_0^+=\{y:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}|y(x)=\frac{\lambda}{x^2},\lambda\in\mathbb{R}\}$. Exceptionnellement, on pourra être indulgent avec les "méthodes" du type "$\frac{y'}{y}=-\frac{2}{x}$".*

(c) **(1pt)** On veut chercher une solution particulière de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, en utilisant la méthode de variation de la constante, cela revient à trouver une primitive de la fonction f de la question précédente. *On cherche une fonction qui vérifie $y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^2+x+1}$. Par la méthode de variation de la constante, on va la chercher sous la forme $y(x)=\frac{\lambda(x)}{x^2}$. On a $y'(x)=\frac{\lambda'(x)}{x^2}-2\frac{\lambda(x)}{x^3}$, et $y'(x)+\frac{2}{x}y(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$ donne $\lambda'(x)=\frac{x^2}{x^2+x+1}=f(x)$.*

(d) **(0,5pt)** Donner une solution particulière de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$, en fonction de la fonction F. *$y(x)=\frac{F(x)}{x^2}$.*

(e) **(0,5pt)** Donner l'ensemble S^+ des solutions de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra l'écrire en fonction de F). *$S^+=\{y:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}|y(x)=\frac{F(x)+\lambda}{x^2},\lambda\in\mathbb{R}\}$. .*

3. **Résolution sur les x non nuls (1 pts)**

(a) **(0,5pt)** Donner rapidement l'ensemble des solutions de (1) sur $\mathbb{R}_-^*=\{x\in\mathbb{R}|x<0\}$, en fonction de F. *Sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation normalisée et l'équation homogène associée ont la même forme que sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, le fait que les x soient négatifs n'intervient pas dans le calcul. Ainsi, $S^-=\{y:\mathbb{R}_-^*\to\mathbb{R}|y(x)=\frac{F(x)+\lambda}{x^2},\lambda\in\mathbb{R}\}$. .*

(b) **(0,5pt)** Donner l'ensemble S des solutions de (1) sur $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, en fonction de F. $S=\left\{y:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}|y(x)=\begin{cases}\frac{F(x)+\lambda_1}{x^2} & si\ x>0\\ \frac{F(x)+\lambda_2}{x^2} & si\ x<0\end{cases},(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

4. **Résolution sur $\mathbb{R}$ (2,5 pts)**

(a) **(0,5pt)** Donner une condition nécessaire sur λ pourqu'une fonction sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $\frac{F(x)+\lambda}{x^2}$ se prolonge par continuité en 0. *Par définition, la fonction F vaut 0 en 0. Donc si $\lambda\neq 0$, la fonction $x\mapsto\frac{F(x)+\lambda}{x^2}$ n'a pas de limite finie en 0. Donc, forcément, $\lambda=0$.*

(b) **(0,5pt)** Donner le développement limité en 0 de F à l'ordre 3. *On a $F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2}x^2+\frac{F'''(0)}{6}x^3+o(x^3)$, c'est-à-dire $F(x)=f'(0)x+\frac{f'(0)}{2}x^2+\frac{f''(0)}{6}x^3+o(x^3)$, et par les calculs de la première partie, $F(x)=\frac{2}{6}x^3+o(x^3)=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.*

(c) **(0,25+0,25+0,5pt)** Soit $\tilde{F}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vaut $\frac{F(x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 0 en 0. Montrer que $\tilde{F}$ est continue et dérivable en 0 (on donnera la valeur de la dérivée en 0). *Continuité : Par le développement limité de la question précédente, pour x proche de 0, $\frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{3}x + \frac{o(x^3)}{x^2}$, donc $\frac{F(x)}{x^2}$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0. Dérivabilité : il faut calculer la limite en 0 de $\frac{\frac{F(x)}{x^2}-0}{x-0} = \frac{F(x)}{x^3}$. Par le développement limité de la question précédente, pour x proche de 0, $\frac{F(x)}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}$, donc $\tilde{F}'(0) = \frac{1}{3}$.*

(d) **(0,5pt)** Donner l'ensemble des solutions de (1) sur $\mathbb{R}$. *Le seul candidat est la fonction $\tilde{F}$ (0,25pt). En dehors de 0, $\tilde{F} = F$, et on sait que F satisfait (1) sur $\mathbb{R}^*$. On a $0 \times \frac{1}{3} + 2 \times 0 = \frac{0}{0+0+1}$, donc $\tilde{F}$ satisfait (1) en 0 (0,25pt). C'est l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.*

Fin de l'épreuve.