Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques L1 Calculus.

Examen session 1 2017-2018

2 heures

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1. : (2 pts) Répondre seulement par vrai/faux. Une réponse juste : + 0,5 pt, une réponse fausse : - 0,5 pt, pas de réponse : 0 pt. La note minimale pour l'exercice est 0.

1. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.
2. Toute fonction continue sur un intervalle admet une dérivée.
3. Toute fonction qui admet une dérivée sur un intervalle admet une primitive.
4. Toute fonction qui admet une primitive sur un intervalle admet une dérivée.

Exercice 2. : (2 pts)

1. **(0,5 pts)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Donner la définition du graphe de f.
2. **(0,5pt)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Donner la définition de minimum de f.
3. **(1pt)** Donner la formule de changement de variable pour le calcul de primitives.

Exercice 3. : (3 pts) À l'aide d'une intégration par partie, calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int^x t\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$.

Exercice 4. : (3,25pt) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + 2y + 4$.

1. **(0,5+0,5pt)** Donner les dérivées partielles de f.
2. **(0,25pt+0,25pt)** Donner le gradient de f et un vecteur normal du graphe de f.
3. **(0,25pt+0,5)** Vérifier que le point (0,0,4) appartient au graphe de f, et donner l'équation du plan tangent du graphe de f en ce point (forme cartésienne).
4. **(1pt)** Donner les points critiques de f.

Problème. (11,5 points)

L'objectif du problème est de trouver (si elles existent) toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$xy' + 2y = \frac{x}{x^2+x+1} . \tag{1}$$

Rappelons que cela signifie que l'on cherche toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2+x+1} .$$

1. **Une primitive de** $f(X) = \frac{X^2}{X^2+X+1}$ **(4,5 pts).**
   (a) **(0,5pt)** Décomposer en éléments simples $\frac{X^2}{X^2+X+1}$.
   (b) **(0,5pt)** Écrire $X^2 + X + 1$ sous la forme $A(U(X)^2 + 1)$, avec A une constante et U une fonction qui sont à déterminer.
   (c) **(0,5pt)** Donner une primitive de $\frac{1}{X^2+X+1}$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) **(1pt)** En écrivant $\frac{X+1}{X^2+X+1} = \frac{1}{2}\frac{2X+1}{X^2+X+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{X^2+X+1}$, déduire des questions précédentes toutes les primitives de la fonction f.
   (e) **(0,5pt)** Donner la primitive F de f qui s'annule en 0.
   (f) **(0,25+0,25+0,5+0,5pt)** Calculez $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ et $F'''(0)$.
2. **Résolution sur les** x **positifs (3,5 pts)** On va chercher les solutions de (1) sur $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.
   (a) **(0,25+0,25 pt)** Écrire (1) sous sa forme normalisée, et écrire l'équation homogène associée.
   (b) **(1pt)** Donner l'ensemble S_0^+ des solutions de l'équation homogène associée sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) **(1pt)** On veut chercher une solution particulière de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, en utilisant la méthode de variation de la constante, cela revient à trouver une primitive de la fonction f de la question précédente.
   (d) **(0,5pt)** Donner une solution particulière de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$, en fonction de la fonction F.
   (e) **(0,5pt)** Donner l'ensemble S^+ des solutions de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra l'écrire en fonction de F).
3. **Résolution sur les** x **non nuls (1 pts)**
   (a) **(0,5pt)** Donner rapidement l'ensemble des solutions de (1) sur $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$, en fonction de F.
   (b) **(0,5pt)** Donner l'ensemble S des solutions de (1) sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, en fonction de F.
4. **Résolution sur** $\mathbb{R}$ **(2,5 pts)**
   (a) **(0,5pt)** Donner une condition nécessaire sur λ pourqu'une fonction sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $\frac{F(x)+\lambda}{x^2}$ se prolonge par continuité en 0.
   (b) **(0,5pt)** Donner le développement limité en 0 de F à l'ordre 3.
   (c) **(0,25+0,25+0,5pt)** Soit $\tilde{F}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vaut $\frac{F(x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 0 en 0. Montrer que $\tilde{F}$ est continue et dérivable en 0 (on donnera la valeur de la dérivée en 0).
   (d) **(0,5pt)** Donner l'ensemble des solutions de (1) sur $\mathbb{R}$.

Fin de l'épreuve.