L1 - MIPI - 2016/2017 - **Examen du 17 mai 2017** - Session 1

Examen de Mathématiques "Calculus"

Durée: 3 heures

Les documents, calculatrices, téléphones, smartphones et tablettes ne sont pas autorisés

Les questions marquées d'une étoile " $\star$ " et signalées en marge par "►" **sont hors barème.**

Questions et applications du cours.

1) Rappeler la formule d'intégration par parties.

► **2)** * On rappelle que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite paire si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ et impaire ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$. Si f est continue sur un intervalle $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, montrer que:

a) si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$;

b) si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 1 : Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On se propose de calculer les intégrales du type $I_{a,b} = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x$.

1) Donner la parité de la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x^4 - 1}$. Pour $|a| < 1$, en déduire la valeur de l'intégrale $I_{-a,a} = \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ sans calculer de primitive de f.

2.a) Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P = X^4 - 1$.

2.b) En déduire la décomposition sur $\mathbb{R}$ en éléments simples de la fraction $f(X) = \dfrac{X}{X^4 - 1}$.

2.c) Se servir de la question précédente pour calculer les $I_{a,b} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

► **3)** * Soit $[a, b] \subset]1, \infty[$. Effectuer en $I_{a,b}$ le changement de variable $y = x^2$, puis retrouver la valeur de $I_{a,b}$.

Exercice 2 : Calculer une primitive F de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-3x}\cos x$.
[Indication: On pourra intégrer f successivement (deux fois) par parties]

Exercice 3 : On veut trouver, par deux méthodes différentes, l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient l'équation différentielle du 2-ème ordre:

$$\text{(E)} \quad y'' - 3y' = \cos x.$$

1) Soit (e) : $\quad z' - 3z = \cos x$.

1.a) Montrer que: $w = y'$ est solution de (e) si et seulement si y est solution de (E).

1.b) Résoudre l'équation sans second membre du premier ordre (e_0) : $\quad z' - 3z = 0$.

1.c) Trouver une solution particulière z_p de l'équation avec second membre (e).

1.d) En déduire l'ensemble des solutions de (e).

1.e) En déduire l'ensemble des solutions y de (E).

2) Résolvons à présent (E) directement, en tant qu'équation du second ordre.
Soit (E_0) : $\quad y'' - 3y' = 0 \quad$ l'équation sans second membre attachée à (E).

2.a) Écrire l'équation caractéristique attachée à (E_0) et trouver ses racines.

2.b) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0).

2.c) Trouver une solution particulière y_p de l'équation (E).

[Indication: on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_\mathrm{p}(x) = \alpha(x)\cos(mx) + \beta(x)\sin(mx)$ avec $m \in \mathbb{R}$ convenable et α, β deux polynômes de degrés convenables. Pour ce faire, (E) pourra être vue comme partie réelle de l'équation complexe $y'' - 3y' = \mathrm{e}^{ix}$]

2.d) Donner l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E).

Tourner la page s.v.p. —>

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$.

1) Ses dérivées partielles (notées par $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$) étant définies sur $\mathbb{R}^2$, calculer leur expression en un point arbitraire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Calculer $f(2,\frac{1}{2})$ et donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $M(2,\frac{1}{2},f(2,\frac{1}{2}))$.

3) Montrer que l'ensemble des points critiques de f est formé des 5 points suivants: $(0,0)$, $(\pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, \mp 1)$.

4) Pour $r \in [0,\infty[$ et $t \in \mathbb{R}$, calculer une expression de $f(r\cos t, r\sin t)$.

5) Calculer $f(0,0)$ et montrer à l'aide de la question précédente que $(0,0)$ est un point où f atteint un minimum local.

6) À présent on veut établir la nature des autres 4 points critiques de f: $(\pm 1, \pm 1)$ et $(\mp 1, \pm 1)$.

6.a) Montrer que ces points ont les coordonnées polaires $(r, t_k) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})$ avec $k = 0,1,2,3$.

6.b) Montrer, en étudiant les variations de la restriction de f au cercle de rayon $\sqrt{2}$ centré à $(0,0)$, à savoir $t \mapsto f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, que celle-ci a des minimums locaux pour les $t = t_k$ de la question précédente.

6.c) Étudier les variations de f le long de la $1^{\text{ère}}$ bissectrice du plan $\mathbb{R}^2$, à savoir les variations de $x \mapsto f(x,x)$. Montrer que cette restriction de f admet des maxima locaux dans $x = \pm 1$.

6.d) De même, étudier les variations de f le long de la $2^{\text{ème}}$ bissectrice du plan $\mathbb{R}^2$, à savoir les variations de $x \mapsto f(x,-x)$. Montrer que cette restriction de f admet des points des maxima locaux dans $x = \pm 1$.

6.e) En déduire des deux questions précédentes la nature des points critiques $(\pm 1, \pm 1)$ et $(\mp 1, \pm 1)$ de f: sont-ils des minima, des maxima ou des points de selle de f ?

7) La fonction f admet-elle un extremum (minimum ou maximum) *global* sur $\mathbb{R}^2$? Justifiez.

8) Considérons à présent les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants:
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$ et $D = C \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

8.a) Calculer $f(1,1)$. Puis calculer $f(1,y)$ pour $0 \leq y \leq 1$.

▶ **8.b)*** Le point $(1,1)$ est-il un extremum global pour $f|_D$ (la restriction de f à D) ? Si oui, préciser si c'est un minimum ou un maximum global sur D. Est-il strict ?

▶ **8.c)*** Le point $(1,1)$ est-il un extremum global pour $f|_C$ (la restriction de f à C) ? Si oui, préciser si c'est un minimum ou un maximum global sur C. Est-il strict ?
[Indication: on pourra comparer pour chaque $0 \leq y \leq 1$, les valeurs de $f(x,y)$ et $f(1,y)$ lorsque x court sur $[0,1]$]