L1 - MPSi - 2016/2017 : "CALCULUS" SESSION 1

CORRIGÉ DE L'EXAMEN de "Calculus" du 17.05.2017

QUESTIONS & APPLICATIONS du COURS :

(1) Si $f, g \in C^1([a,b], \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

IPP : $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$

où $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

(2)* $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \underset{\text{chasles}}{=} \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad (*)$

et dans la première intégrale on fait le chgt. de var. $y = -x$ (donc $dx = -dy$; $x = -a \Rightarrow y = a$; $x = 0 \Rightarrow y = 0$) et elle devient : $-\int_a^0 f(-y)\,dy = \int_0^a f(-y)\,dy$.

(a) Si f paire : $f(-y) = f(y)$ d'où $(*)$ devient

$$\int_{-a}^{a} f = \int_0^a f + \int_0^a f = 2\int_0^a f$$

(b) Si f impaire : $f(-y) = -f(y)$ d'où $(*)$ devient

$$\int_{-a}^{a} f = -\int_0^a f + \int_0^a f = 0.$$

EXERCICE 1 :

(1) On a $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^4 - 1} = -\dfrac{x}{x^4-1} = -f(x)$

donc f est impaire.

Donc $I_{-a,a} = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

(2.a) $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$

(2.b) Décomposition a priori :

$$f(X) = \frac{X}{X^4-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

$a = \left((x-1)f(x)\right)_{x=1} = \frac{1}{4}$; $b = \left((x+1)f(x)\right)_{x=-1} = \frac{1}{4}$

$x = 0 \Rightarrow 0 = -a + b + d$ et
$0 = \lim_{x\to\infty} x f(x) = a + b + c$
$\Rightarrow \begin{cases} d = a - b = 0 \\ c = -a - b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

d'où :

$$f(X) = \frac{X}{X^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)} - \frac{X}{X^2+1}\right)$$

(2.c) $I_{a,b} = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_a^b \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int_a^b \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{x\,dx}{x^2+1}$

$= \frac{1}{4}\left[\ln|x^2-1|\right]_a^b - \frac{1}{4}\int_a^b \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1}\right)\right]_a^b$

Obs : Par exemple, si $[a,b] \subset]1,\infty[$ alors $x^2 - 1 > 0$ $\forall x \in [a,b]$ et on a :

$$I_{a,b} = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{b^2-1}{b^2+1}\right) - \ln\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{(b^2-1)(a^2+1)}{(b^2+1)(a^2-1)}$$

(3)* Soit $[a,b] \subset]1,\infty[$. Posons $y = x^2$. Alors $x\,dx = \frac{1}{2}dy$ et donc

$$I_{a,b} = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln|y-1| - \ln|y+1|\right]_{a^2}^{b^2} \underset{y>1}{=} \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right)\right]_{a^2}^{b^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{b^2-1}{b^2+1}\right) - \ln\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{(b^2-1)(a^2+1)}{(b^2+1)(a^2-1)}$$

EXERCICE 2 : Méthode 1 : (IPP)

$$\int e^{-3x}\cos x\,dx = \int e^{-3x}(\sin x)'\,dx \overset{IPP}{=}$$

$$= e^{-3x}\sin x - \int (e^{-3x})'\sin x\,dx =$$

$$= e^{-3x}\sin x + 3\int e^{-3x}\underbrace{\sin x}_{= -(\cos x)'}\,dx \overset{IPP}{=}$$

$\overset{IPP}{=} e^{-3x}(\sin x - 3\cos x) + 3\int (e^{-3x})' \cos x \, dx$

$= e^{-3x}(\sin x - 3\cos x) - 9\int e^{-3x} \cos x \, dx$

Donc, si F est une des primitives de $x \mapsto e^{-3x}\cos x$ on vient de montrer que :

$F = e^{-3x}(\sin x - 3\cos x) - 9F$, d'où on déduit que l'ensemble des primitives de $x \mapsto e^{-3x}\cos x$ est : $\left\{ \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \Phi(x) = \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)e^{-3x} + \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Méthode 2 : On observe que $e^{-3x}\cos x$ est la partie réelle de la fonction $x \mapsto e^{(-3+i)x} \in \mathbb{C}$. Alors les primitives de $x \mapsto e^{-3x}\cos x$ seront les parties réelles des primitives (à valeurs complexes) de $x \mapsto e^{(-3+i)x}$. On sait que si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors la primitive de $x \mapsto e^{\alpha x}$ est $\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}e^{\alpha x}$. Dans notre cas $\alpha = -3+i$ donc $|\alpha|^2 = (-3)^2 + 1^2 = 10$, donc une primitive de $x \mapsto e^{(-3+i)x}$ est : $x \mapsto \frac{-3-i}{10}e^{(-3+i)x}$.

Or $\frac{-3-i}{10}e^{(-3+i)x} = \frac{-1}{10}(3+i)(\cos x + i\sin x)\cdot e^{-3x}$

$= -\frac{e^{-3x}}{10}\left((3\cos x - \sin x) + i(\cos x + 3\sin x)\right)$

La partie réelle de celle-ci est une primitive de $x \mapsto e^{-3x}\cos x$, à savoir :

$F(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{-3-i}{10}e^{(-3+i)x}\right) = \frac{e^{-3x}}{10}(\sin x - 3\cos x)$

et on retrouve ainsi le résultat obtenu par la "Méthode 1" (IPP)

EXERCICE 3 :

1.a $w = y'$ est sol. sur $\mathbb{R}$ de $(e) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad w'(x) - 3w(x) = \cos x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (y')'(x) - 3y'(x) = \cos x$

$\Leftrightarrow y$ est sol. sur $\mathbb{R}$ de (E)

1.b On sait que l'ensemble des solutions de l'équation SSM (e_0) : $z' - 3z = 0$ est un $\mathbb{R}$-e.v. S_0 de dimension 1 engendré par une fonction du type $x \mapsto z_0(x) = e^{-\int(-3)dx} = e^{+3x}$. D'où

$S_0 = \mathrm{Vect}\{x \mapsto e^{3x}\} = \{z_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid z_0(x) = \lambda e^{3x}, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$

1.c L'équation (e) étant très simple on peut deviner une solution évidente, d'autant plus que le membre de droite est une fonct. trigo : cos dont les dérivées successives sont (au signe près) des sin et des cos. On peut donc proposer une solution évidente du type $z_p(x) = \alpha\sin x + \beta\cos x$. Alors (e) devient : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$(\alpha\sin x + \beta\cos x)' - 3(\alpha\sin x + \beta\cos x) = \cos x \Leftrightarrow$

$(\alpha - 3\beta - 1)\cos x + (-\alpha - 3\beta)\sin x = 0 \underset{\{\sin,\cos\}\text{ syst libre}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 3\beta = 1 \end{cases}$ dont le déterm. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

donc c'est un syst. de Cramer et les solutions (uniques) sont : $\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{1}{10}$ et $\beta = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-10} = -\frac{3}{10}$

d'où $z_p(x) = \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)$ est une solution de (e).

Une autre façon de faire est d'appliquer la méthode de variation de la constante : on propose $z_p = \lambda z_0$ où λ est une fonction dérivable et z_0 est une solution de l'éq. SSM (e_0). Alors (e) devient (en demandant à ce z_p de la vérifier) :

$$(\lambda z_0)' - 3\lambda z_0 = \cos \iff \lambda' z_0 + \lambda(z_0' - 3z_0) = \cos$$

$$\underset{z_0 \text{ vérif}(e_0)}{\iff} \lambda' z_0 = \cos \iff \lambda'(x) = (e^{3x})^{-1} \cdot \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

d'où par intégration on trouve une primitive de λ', donc une fonction λ en tant que primitive de $x \mapsto e^{-3x} \cos x$.

Or, à l'EXERCICE 2 le calcul d'une telle primitive a été déjà fait, et il a donné le résultat (on choisit la constante nulle car on veut juste avoir une sol. particulière de (e)) :

$$\lambda(x) = \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x) e^{-3x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

d'où

$$z_p(x) = \lambda(x) z_0(x) = \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x) \cancel{e^{-3x}} \cdot \cancel{e^{3x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1.d Cf. Thm du CM, l'ensemble S des solutions de l'éq. ASM (e) est un espace affine de dim $= 1$ à savoir une somme entre le $\mathbb{R}$-e.v. S_0 des solutions de l'éq. SSM (e_0) et une sol. particulière z_p de (e) : $S = S_0 + \{z_p\}$. Donc

$$S = \left\{ z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid z(x) = \lambda e^{3x} + \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x) \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}_{\forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

1.e En utilisant (1.a), l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est l'ensemble des primitives des fonctions de l'ensemble S de la question précédente. Il s'agit donc de résoudre, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, l'éq. différentielle :

$$y' = \lambda e^{3x} + \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)$$

on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \lambda \int e^{3x} dx + \frac{1}{10} \int (\sin x - 3\cos x) dx$$

$$= \frac{\lambda}{3} e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x) + \mu$$

où $\mu \in \mathbb{R}$

Donc (pour $\alpha = \frac{\lambda}{3}$: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y(x) = \alpha e^{3x} + \mu - \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x) \ \forall (\alpha, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2.a $r^2 - 3r = 0 \iff r(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ et $r_2 = 3$

2.b Nous sommes dans le cas d'une équation réelle et dont les racines de l'éq caract. sont réelles et distinctes. On a alors :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\{x \mapsto e^{r_1 x} ; x \mapsto e^{r_2 x}\} = \mathrm{Vect}\{x \mapsto 1 ; x \mapsto e^{3x}\}$$

$$= \left\{ y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y_0(x) = \alpha e^{3x} + \mu \cdot 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}_{\forall (\alpha, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

2.c L'equation (E) est une éq. diff d'ordre 2 linéaire, à coeffs constants mais dont le membre de droite n'est pas sous la forme exponentielle $\times$ polynôme

Toutefois, sachant que $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$, on pourrait regarder (E) comme "partie réelle" d'une équation dans $\mathbb{C}$: $y'' - 3y = e^{ix}$ $(\tilde{E})$

Or $e^{ix} = P(x)e^{ix}$ où $P(x) = 1 \neq 0$ donc $d^oP = 0$ et où $i \neq r_1$ et $i \neq r_2$ (r_1, r_2 = racines de l'éq. caractéristiques). Alors, par un résultat du CM, on peut chercher une solution de $(\tilde{E})$ sous la forme $\tilde{y}_p(x) = Q(x)e^{ix}$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$ a le même degré que P. Donc dans notre cas, Q = polynôme constant complexe $= \gamma + i\delta$ avec $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$. Donc pour $\tilde{y}_p(x)$ on aurait

$$(\gamma + i\delta)(\cos x + i\sin x) = (\gamma\cos x - \delta\sin x) + i(\delta\cos x + \gamma\sin x)$$

et sa partie réelle (qui correspond à une solution de la partie réelle de $(\tilde{E})$, à savoir à (E)) serait alors de la forme :

$$y_p(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$$

où α, β sont des constantes réelles à trouver en imposant à $y_p(x)$ de vérifier (E). On a :

$$y_p'(x) = \beta\cos x - \alpha\sin x$$

$$y_p''(x) = -\alpha\cos x - \beta\sin x \text{, d'où, (E) devient:}$$

$$-\alpha\cos x - \beta\sin x - 3\beta\cos x + 3\alpha\sin x - \cos x = 0$$

$$\Longleftrightarrow \cos x \cdot (-\alpha - 3\beta - 1) + (3\alpha - \beta)\sin x = 0 \ \forall x$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = -1 \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$ dont le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ donc il s'agit d'un syst. de Cramer

les formules de Cramer donnent :

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-1}{10} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-3}{10}$$

donc $y_p(x) = -\frac{1}{10}(3\sin x + \cos x)$

2.d Cf. Thm. du CM, l'ensemble des solutions, $\mathcal{S}$, de l'équation ASM (E) est un espace affine de dim = 2 :

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{y_p\}$ où $\mathcal{S}_0$: $\mathbb{R}$-e.v. des sol. de l'éq. SSM (E_0) ; y_p : une sol. particulière de (E)

Donc

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y(x) = \alpha e^{3x} + \mu - \frac{1}{10}(3\sin x + \cos x) \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall (\alpha,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

EXERCICE 4 :

1

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 0 - 2xy^2 = 2x(1-y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + 2y - 2x^2y = 2y(1-x^2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

2 $f(2, 1/2) = 4 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{13}{4}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(2,\frac{1}{2}) = 3 = -\frac{\partial f}{\partial y}(2,\frac{1}{2})$.

L'équation du plan tangent dans un point (x_0, y_0, z_0) du graphe de f (donc pour $z_0 = f(x_0,y_0)$) est :

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

d'où, pour $(x_0, y_0) = (2, \frac{1}{2})$ on obtient :

$$12x - 12y - 4z + 5 = 0$$

(3) (x,y) est point critique de f ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$

$\iff \begin{cases} x(1-y)(1+y)=0 \\ y(1-x)(1+x)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \text{ ou } y=\pm 1 \\ \text{et} \\ y=0 \text{ ou } x=\pm 1 \end{cases}$

$\iff (x,y)\in\{(0,0),(\pm 1,\pm 1),(\pm 1,\mp 1)\}$

(4) $f(r\cos t, r\sin t) = r^2(1-r^2\cos^2 t\sin^2 t)$
$= r^2\left(1-\frac{r^2}{4}\sin^2(2t)\right)$

(5) $f(0,0)=0$. Comme $|\sin\theta|\leq 1\ \forall\theta$, on a $\forall t$: $0\leq \sin^2(2t)\leq 1$ donc $-\sin^2(2t)\geq -1$ d'où, avec (4) :

$f(r\cos t, r\sin t)\geq r^2\left(1-\frac{r^2}{4}\right)\geq 0$ si $0\leq r\leq 2$.

Donc $f(x,y)\geq 0 = f(0,0)\quad\forall (x,y)\in B((0,0);2)$

(où $B((0,0),2)$ est la boule de centre $(0,0)$ et rayon 2)

(6) : (6.a) En coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ $(*)$

les points $(\pm 1,\mp 1)$ et $(\pm 1,\pm 1)$ sont à distance $\sqrt{2}=\sqrt{(\pm 1)^2+(\mp 1)^2}$ de $(0,0)$ donc $r=\sqrt{2}$. Donc il s'agit de résoudre, en inconnue t, 4 systèmes $(*)$ où $r=\sqrt{2}$ et $(x,y)\in\{(\pm 1,\pm 1),(\pm 1,\mp 1)\}$. Autrement dit il s'agit des t t.q. les complexes $\sqrt{2}e^{it}$ sont affixes des points de $\mathbb{R}^2$ de l'ensemble ci-dessus. Les solutions de ce pb. sont évidentes (par vérif.)

(6.b) $f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = 2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2(2t)\right) =$

$= \frac{1}{2}(3+\cos(4t)) \overset{\text{not}}{=} \tilde{f}(t)$

(on a utilisé la formule $\cos(2\theta) = 1-2\sin^2\theta$ pour $\theta=2t$)

Alors $\tilde{f}'(t)=0 \iff \sin(4t)=0 \iff t\in\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$

(Obs : $t_k\in\frac{\pi}{4}(2\mathbb{Z}+1)\subset\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$).

Ensuite, $\tilde{f}''(t) = -8\cos(4t)$ et elle vaut $+1>0$ $\forall t\in\frac{\pi}{4}(2\mathbb{Z}+1)$ donc en chaque $t_k=(2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k=0,1,2,3$ $f(\sqrt{2}\cos,\sqrt{2}\sin)$ a un minimum local.

(Obs : (ceci n'a pas d'importance pour notre pb) en chaque point de $\frac{\pi}{4}\cdot 2\mathbb{Z}=\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\subset\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ la fonction $f(\sqrt{2}\cos,\sqrt{2}\sin)$ admet un max local (car $\tilde{f}''$ dans ces points vaut $-1<0$))

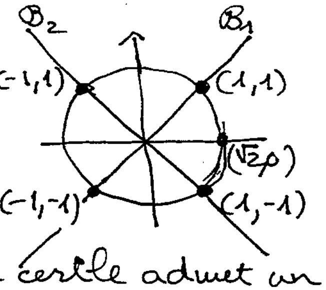
(6.c) $f(x,x) = 2x^2-x^4 = x^2(2-x^2) \overset{\text{not}}{=} g(x)$

$g'(x) = 4x(1-x^2) \implies g'(\pm 1)=0$

$g''(x) = 4(1-3x^2) \implies g''(\pm 1) = -8<0$

Donc $x\mapsto f(x,x)$ admet bien un max local pour $x=\pm 1$

(6.d) $f(x,-x) = f(x,x)$ donc la conclusion sera la même qu'à (6.c).



(6.e) On a vu à (6.b) que lorsqu'on approche n'importe lequel des pts critiques $(\pm 1,\pm 1)$ et $(\pm 1,\mp 1)$ le long du cercle de rayon $\sqrt{2}$, la restriction de f à ce cercle admet un min local, alors qu'à (6.c) et (6.d) on a vu que, en approchant ces points le long des directions normales au cercle (à savoir le long des bissectrices B_1 et B_2) la restriction de f à celles-ci admet un max local en ces pts.

Il s'en suit que les points critiques $(\pm 1, \pm 1)$ et $(\pm 1, \mp 1)$ ne sont ni des min ni des max locaux de f, mais des points de selle de f.

(7) $(0,0)$ est le seul min local de f. Aussi, $\lim_{x \to \infty} f(x,x) = \lim_{x\to\infty} x^2(2-x^2) = -\infty < 0 = f(0,0)$ montre que f n'a pas de min global sur $\mathbb{R}^2$.

f n'a pas de max local donc ni global.

(par ailleurs $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = +\infty$ donc même si f admettait un max local, il n'y aurait pas eu de max global)

(8) (8.a) $f(1,1) = 1$; $f(1,y) = 1 \ \forall y$.

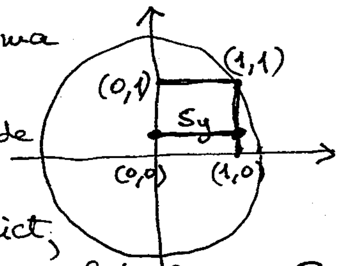
(8.b)* D est juste le segment de la première bissectrice compris entre $(0,0)$ et $(1,1)$. À (6.c) on a vu que $x \mapsto f(x,x)$ admettait un max local en $x = 1$.

Aussi, on a vu que $x \mapsto f(x,x)$ admet une dérivée $g'(x) = 4x(1-x^2)$ donc positive pour $x \in [0,1]$ donc $x \mapsto f(x,x)$ est strictement croissante, donc $f|_D$ admet un max global strict (sur D)

(8.c)* C est le carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Tout point $(x,y) \in C$ se trouve sur un segment $S_y = \{(x,y) \in C \mid 0 \le x \le 1\}$ pour un $y \in [0,1]$. Si y est fixé la restriction de f à S_y est $f(\cdot, y)$. Sa dérivée est $(f(\cdot,y))'(x) = 2x(1-y^2)$, $\forall x \in [0,1]$ donc est positive quand x court sur $[0,1]$ et ceci $\forall y \in [0,1]$.

Donc $f|_{S_y}$ est croissante quand $x \in [0,1]$ et atteint son max en $x = 1$, et ceci $\forall y \in [0,1]$. Ce max vaut $f(1,y) = 1$, $\forall y \in [0,1]$ donc $\forall (x,y) \in C$ la valeur maximale prise par f est 1.



Conclusion : f admet des maxima sur le bord du carré C : la valeur de f en tous les points de $\{(1,y) \mid y \in [0,1]\}$ est 1 donc ce n'est pas un maximum strict, mais ce sont des points de max global sur C.

(Obs : on peut vérifier que les pts $(x,1)$ ont la m̂ propriété : $f(x,1) = 1 \ \forall x \in [0,1]$)

— o —

DEVOIR MAISON : Soit à présent $B((0,0), \sqrt{2}) \overset{not}{=} B$ la boule centrée sur $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ (frontière comprise)

1) Quelle est la nature des points $(\pm 1, \pm 1)$ et $(\pm 1, \mp 1)$ pour la restriction $f|_B$ de f à B ? Sont-ils des extremas ou des points de selle pour $f|_B$?

2) On a vu à (6.b) que la restriction de f au cercle de rayon $\sqrt{2}$ admet des min dans les points $(\sqrt{2}, t_k)$ (coord. polaires) mais aussi (voir l'Obs. de (6.b)) elle admet des maxima dans les points correspondant aux coord. polaires $(\sqrt{2}, \tau_k)$ où $\tau_k = \frac{\pi}{2} k$, $k = 0,1,2,3$ ce qui correspond aux pts de $\mathbb{R}^2$ $(\pm\sqrt{2}, 0)$ et $(0, \pm\sqrt{2})$. Quelle est la nature de ces points (max, min ou selle) pour $f|_B$?