L1-S2 - SESSION 2016-2017 - SESSION 2

CORRIGÉ de l'EXAMEN de "CALCULUS"

EXERCICE 1 :

(1) $P'(X) = 2X+4$

$$I = \int_0^1 \frac{P'(x)}{P(x)}\,dx = \Big[\ln|P(x)|\Big]_0^1 = (\ln 10 - \ln 5) = \ln 2$$

(2) $P(X) = X^2 + 4X + 4 + 1 = (X+2)^2 + 1^2$.

(3) $$J = \int_0^1 \frac{(x+2)'}{(x+2)^2+1^2}\,dx = \Big[\operatorname{Arctan}(x+2)\Big]_0^1 =$$
$$= \operatorname{Arctan}3 - \operatorname{Arctan}2.$$

(4) La décomposition "a priori" est (sur $\mathbb{R}$) :

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+4X+5}$$

(en effet, de (2) il résulte que les racines de P sont purement complexes, donc P est irréductible sur $\mathbb{R}$)

$$\Big[F(x)\cdot(x+1)\Big]_{x=-1} = \begin{cases} a \\ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$F(0) = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ a + \frac{c}{5} \end{cases} \Rightarrow 5a + c = 1 \Rightarrow c = 1 - 5a = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} xF(x) = \begin{cases} 0 \\ a+b \end{cases} \Rightarrow b = -a = -\frac{1}{2}$$

d'où $$F(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{X+3}{X^2+4X+5}\right)$$

(5) $$K = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x+1)'}{x+1}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(2x+4)+2}{x^2+4x+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1}_{\ln 2} - \frac{1}{4}I - \frac{1}{2}J = \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2}J$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{2} + \operatorname{Arctan}2 - \operatorname{Arctan}3\right).$$

EXERCICE 2 :

Obs : $\frac{1}{2}(x^2+x)' = x + \frac{1}{2}$. Donc

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (x^2+x)'\ln(x+1)\,dx \overset{\text{IPP}}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\Big[x(x+1)\ln(x+1)\Big]_0^t - \int_0^t x(x+1)\big(\ln(x+1)\big)'dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(t(t+1)\ln(t+1) - \int_0^t x\cancel{(x+1)}\cdot\frac{1}{\cancel{x+1}}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(t(t+1)\ln(t+1) - \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^t\right) =$$
$$= \frac{t}{4}\Big(2(t+1)\ln(t+1) - t\Big)$$

EXERCICE 3 :

(1) $r^2 + 4r + 5 = 0 \Rightarrow r_\pm = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm i$

(2) les racines $r_\pm$ sont purement complexes alors que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (l'équation est sur $\mathbb{R}$). Donc $\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}\{x \mapsto e^{-2x}\cos x \ ;\ x \mapsto e^{-2x}\sin x\}$ (car $|\Delta| = 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = 1$)

(3) L'équation (E) a le membre de droite du type polynôme $\times$ exponentielle : $P(x)e^{mx}$ où $P(x) = 17x + 8$ et $m = 2$.

En comparant $m = 2$ avec $r_\pm = -2 \pm i$ on constate que $m \neq r_\pm$ donc d'après un résultat du CM, on cherchera une sol. particulière sous la forme : $y_p(x) = Q(x)e^{2x}$ où $d^\circ Q = d^\circ P = 1$, donc on pose $y_p(x) = (ax+b)e^{2x}$ et on calcule :

$y_p'(x) = (2ax + 2b + a)e^{2x}$ et

$y_p''(x) = (4ax + 4b + 4a)e^{2x}$ qu'on remplace dans (E) et on obtient (en regroupant les puissances de x et en mettant en facteur e^{2x}) :

$$\big((4ax + 4\cdot 2ax + 5ax) + (4b + 4a + 8b + 4a + 5b)\big)e^{2x} = (17x+8)\, e^{2x} \quad \forall x$$

$\underset{\substack{e^{2x}\neq 0\\ \forall x}}{\Longleftrightarrow}$ $(17a - 17)x + (8a + 17b - 8) = 0 \ \forall x$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 17b + 8a - 8 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Donc $y_p(x) = xe^{2x}$

(4) $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{y_p\}$ donc une solution générique de (E) est : $y(x) = \lambda e^{-2x}\cos x + \mu e^{-2x}\sin x + xe^{2x}$ $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 4 : (1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{1}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3}x^2 - 1\right) f(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\, f(x,y)$

(2) $f(0,0) = e^0 = 1 \Rightarrow M(0,0,1) \in G_f$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = (0-1)\, f(0,0) = -1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2\cdot 0\cdot 1 = 0$. L'éq du plan tangent :

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0)$$

$\Longleftrightarrow \boxed{z = 1 - x}$

(3) ((x,y) pt critique pour f) ssi $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$

ssi ($x^2 - 1 = 0$ et $y = 0$) ssi $(x,y) = (\pm 1, 0)$

(on a utilisé que $f(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y)$ car exp.)

(4) On a : $f(x,y) = e^{\frac{1}{3}x^3 - x} \cdot e^{-y^2} = g(x)\cdot h(y)$ (les variables sont séparables) ce qui nous permet d'étudier séparément ~~sa~~ variation en x et en y.

Ici le point d'étude est $(-1,0)$, et comme pour $y=0$, $e^{-y^2} = 1 \geqslant e^{-y^2} \ \forall y \neq 0$ on déduit que e^{-y^2} atteint un max en $y=0$.

Aussi, $g(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - x}$ a $g'(-1) = 0$ et $g''(x) = \left(2x + (x^2-1)^2\right) g(x)$ donne $g''(-1) = -2g(-1)$ d'où $g''(-1) < 0$ i.e. $x = -1$ est un max local pour g.

Conclusion : $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ a en $(x,y) = (-1,0)$ un max local (car g a un max local en $x = -1$ et h a un max local en $x = 0$ et g et h sont $\geqslant 0$).

(5.a) $f(1,y) = g(1)\, h(y) = e^{-\frac{2}{3}} e^{-y^2} \leqslant e^{-\frac{2}{3}}\cdot 1 = e^{-\frac{2}{3}} h(0)$

Donc en $y=0$, $f(1,\cdot)$ admet un maximum local.

(5.b) $f(x,0) = g(x)\, h(0) = e^{+\frac{1}{3}x^3 - x}\cdot 1$

On a déjà vu que $g'(x) = (x^2-1)e^{\frac{1}{3}x^3 - x}$ vaut 0 en $x = 1$ aussi et $g''(x) = (2x + (x^2-1)^2)\, g(x)$ vaut $2g(2) > 0$ en $x = 1$ donc g admet ~~un~~ min d'où : $f(\cdot,0)$ admet un minimum local en $x=1$

(5.c) On a vu que lorsqu'on approche $(1,0)$ le long de Oy, en $y=0$, $f(1,\cdot)$ a un max et le long de Ox, en $x=1$, $f(\cdot,0)$ a un min donc $(1,0)$ est un point de selle pour f.

(6) le domaine d'étude de f est non-borné : $\mathbb{R}^2$, donc il ne peuvent y avoir d'autres extrema que ceux parmi les points critiques trouvés.
Or, on n'a pas trouvé de minimum local, donc il ne peut y avoir de min global non plus.
Le seul max local trouvé est en $(-1,0)$ et
$f(-1,0) = e^{2/3} < \lim_{x\to\infty} f(x,0) = \infty$.
Donc ce maximum n'est pas global.

EXERCICES :

(1) On voit que dans $\int_1^7 \dots$ et $\int_{-1}^5$ la longueur de l'intervalle d'intégration est la même : $7-1 = 6 = 5-(-1)$. Donc $[-1,5]$ étant le translaté de 2 unités vers la gauche de $[1,7]$ on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variable simple : on pose $y = x-2$ dans l' $\int_1^7$ et on a : $dy = dx$,
$x-1 = y+1$ et $7-x = 5-y$ d'où
$$\int_1^7 \sqrt{(x-1)(7-x)}\,dx = \int_{-1}^5 \sqrt{(y+1)(5-y)}\,dy.$$

(2)* On observe que, en procédant de la même manière qu'à (1) mais en proposant $y = x-\alpha$ où α = moitié de l'intervalle $[1,7]$ (par ex.) translatée en 0, on obtient une intégrale sur un intervalle symétrique. Dans notre cas ce serait $\int_{-3}^3$ et donc $\alpha = 4$.

Donc $I = \int_1^7 \sqrt{(x-1)(7-x)}\,dx \underset{y=x-4}{=} \int_{-3}^3 \sqrt{(y+4-1)(7-y-4)}\,dy$
$$= \int_{-3}^3 \sqrt{(3-y)(3+y)}\,dy = \int_{-3}^3 \sqrt{3-y^2}\,dy$$
Donc $a = 3$.

(3)* $$I_a = \int_{-a}^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy \underset{y\mapsto\sqrt{a^2-y^2} \text{ est fonction PAIRE}}{=} 2\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy$$
et si on pose $y = a\sin t$ l'intervalle d'intégration devient $[0,\frac{\pi}{2}] = [\mathrm{Arcsin}(0), \mathrm{Arcsin}(1)]$, et :
$$I_a = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \underset{\cos t \geq 0 \text{ sur } [0,\frac{\pi}{2}]}{=} 2a\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt =$$
$$= 2a\,[\sin t]_0^{\pi/2} = 2a$$

Obs : ceci donne $I = 6$.