L1 - MIPI - 2016/2017 - **Examen du 13 juin 2017** - Session 2

Examen de Mathématiques "Calculus"

Durée: 2 heures – les documents, calculatrices, téléphones, smartphones et tablettes ne sont pas autorisés
Les questions marquées d'une étoile " $\star$ " et signalées en marge par "►" **sont hors barème.**

Exercice 1 : Soit le polynôme $P = X^2 + 4X + 5$.

1) Calculer l'expression du polynôme dérivé P'. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

2) Mettre le polynôme P sous la forme $(aX+b)^2 + c^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à trouver.

3) Se servir de la question précédente pour calculer la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

4) Décomposer en éléments simples $F(X) = \dfrac{1}{(X+1)(X^2+4X+5)}$

5) Utiliser les questions précédentes pour déduire la valeur de l'intégrale: $K = \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : Calculer la primitive: $I(t) = \displaystyle\int_0^t (x + \frac{1}{2}) \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}_+$. [Indication: IPP]

Exercice 3 : On veut résoudre en $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire suivante:

(E) $\quad y'' + 4y' + 5y = (17x+8)\mathrm{e}^{2x}$.

1) Écrire l'équation caractéristique attachée à (E) et trouver ses racines.

2) En déduire $\mathcal{S}_0$, l'espace vectoriel des solutions de l'équation avec second membre nul associée à (E):

(E_0) $\quad y'' + 4y' + 5y = 0$.

3) Trouver une solution particulière y_p de (E).

4) Donner $\mathcal{S}$, l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \exp(\frac{1}{3}x^3 - x - y^2)$.

1) Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ de f en chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Vérifier que le point $M(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ appartient au graphe de f et donner l'équation du plan tangent au graphe en ce point.

3) Montrer que f admet seulement deux points critiques: $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

4) Écrire $f(x, y)$ sous forme de produit $g(x)h(y)$ où g, h sont des fonctions à une seule variable convenablement choisies. En déduire que $(-1, 0)$ est un maximum local pour f.
[Indication: penser à utiliser $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b$ convenablement dans l'expression de f]

5) À présent on veut établir la nature du point critique $(1, 0)$:

5.a) Montrer, en étudiant les variations de l'application partielle $y \mapsto f(1, y)$, que celle-ci a un maximum local pour $y = 0$.

5.b) Montrer, en étudiant les variations de l'application partielle $x \mapsto f(x, 0)$, que celle-ci a un minimum local pour $x = 1$.

5.c) En déduire des deux questions précédentes la nature du point critique $(1, 0)$: est-il un minimum, un maximum ou un point de selle de f ?

► **6)*** La fonction f admet-elle un extremum (minimum ou maximum) *global* sur $\mathbb{R}^2$? Justifiez.

Exercice 5 : On veut calculer $I = \int_1^7 \sqrt{(x-1)(7-x)}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer l'identité $\displaystyle\int_1^7 \sqrt{(x-1)(7-x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^5 \sqrt{(x+1)(5-x)}\,\mathrm{d}x$ sans calculer les intégrales.

[Indication: changement de variable suggéré par les bornes des intégrales]

► **2)*** Utiliser l'idée de la question précédente pour montrer que $I = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2}\,\mathrm{d}y$ avec a constante à préciser.

► **3)*** En déduire la valeur de I. [Indication: parité, et changement de variable $y = a \sin t$]