L1 - "Calculus" - 2015/2016 - **Examen du 14 juin 2016** - Session 2

Examen de Mathématiques "Calculus"

Durée: **2** heures – les documents, calculatrices, téléphones, smartphones et tablettes ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 : On veut calculer: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{3x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$. Soit le polynôme $P = \frac{4}{3}(3X^2-3X+1)$.

1) Calculer l'expression du polynôme dérivé P'. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{3x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$.

2) Mettre le polynôme P sous la forme $(aX+b)^2+c^2$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$ à trouver.

3) Se servir des questions précédentes pour calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{3x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$.

[Indication: on pourrait mettre le polynôme $X+1$ sous forme d'une expression ne dépendant que de P'].

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y - xy^2$.

1) Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ de f en chaque point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Vérifier que le point $M(1,1,0) \in \mathbb{R}^3$ appartient au graphe de f et donner l'équation du plan tangent au graphe en ce point.

3) Montrer que le seul point critique de f est $(0,0)$. Calculer la valeur de f en ce point.

4) Montrer que le point critique $(0,0)$ est point de selle pour f.
[Indication: on pourrait étudier les variations de la restriction de f à la 2^{eme} bissectrice dans $\mathbb{R}^2$, à savoir $x \mapsto f(x,-x)$ autour de $x=0$].

5) Peut-on dire que f admet un extremum (minimum ou maximum) global sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : On veut trouver l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation différentielle du premier ordre

$$(\mathcal{E}): \qquad y' - 2y = \mathrm{e}^x \cos(2x).$$

1) Soit $(\mathcal{E}_0): \quad y' - 2y = 0$ l'équation sans second membre attachée à $(\mathcal{E})$. Trouver l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions y_0 de $(\mathcal{E}_0)$.

2) Calculer les primitives de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(2x)$. [Indication: IPP]

3) Trouver une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$. [Indication: variation de la constante]

4) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 4 : On se propose de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)\cdot \ln(\sin^2 x + 1)\,\mathrm{d}x$.

1) Soit $R(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ où $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{2-\cos^2 x}\sin x$.

1.a) Calculer $R(-x)$, $R(\pi+x)$, $R(\pi-x)$ et les comparer à $R(x)$.

1.b) Expliquer pourquoi le plus efficace changement de variables pour le calcul de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ est $y = \cos x$. [Indication: règles de Bioche]

1.c) Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{2-y^2}$.
[Indication: décomposition en éléments simples de la fraction]

1.d) En déduire la valeur de J.

2) Montrer que $I = 2J$. Déduire ainsi la valeur de I. [Indication: IPP]