Examen de Mathématiques "Calculus"

Durée: **3** heures – les documents, calculatrices, téléphones, smartphones et tablettes ne sont pas autorisés
Les questions indiquées par une étoile sont hors barème (i.e. bonus)

Exercice 1 : Soit le polynôme $P = X^2 - 4X + 5$.

1) Calculer l'expression du polynôme dérivé P'. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$.

2) Mettre le polynôme P sous la forme $(aX+b)^2 + c^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à trouver.

3) Se servir des questions précédentes pour calculer la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{x-3}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$.
[Indication: on pourrait mettre le polynôme $X - 3$ sous forme d'une expression ne dépendant que de P'].

4) Décomposer en éléments simples $F(X) = \dfrac{3X^2 - 11X + 10}{X^3 - 4X^2 + 5X}$

5) En déduire la valeur de l'intégrale: $K = \int_1^2 F(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : **1)** Calculer la primitive: $I(t) = \displaystyle\int_1^t \ln(x^2 - x + 1)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$. [Indication: IPP]

2) Soit $A(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ où $f(x) = \dfrac{\tan(2x)}{3 + 2\sin^2 x}$.

- Calculer $A(-x)$, $A(\pi+x)$ et les comparer à $A(x)$. En déduire le plus efficace changement de variables pour le calcul de la primitive $F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$. [Indication: règles de Bioche]
- Calculer l'expression de $F(t)$ sur $\mathbb{R}$ à l'aide du changement de variables choisi.

[Indication: on rappelle les formules $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = (1 - \tan^2 x)/(1 + \tan^2 x)$]

Exercice 3 : On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l' équation différentielle linéaire suivante:
(E) $\quad y'' - 3y' + 2y = 4(3x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1) Calculer $\mathcal{S}_0$, l'espace vectoriel des solutions de l'équation avec second membre nul associée.

2) Trouver une solution particulìre y_p de (E)

3) Donner $\mathcal{S}$, l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4 : On se propose d'étudier la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sin(\frac{\pi}{2}x)\cos(\frac{\pi}{2}y)}$.

1) Montrer que

$$-1 \leq \sin a \cos b \leq 1, \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

en utilisant uniquement le fait que les fonctions $|\sin|$ et $|\cos|$ sont bornées par 1.

2) En déduire que f satisfait sur $\mathbb{R}^2$ une double inégalité: $\alpha \leq f \leq \beta$ où α, β sont à trouver.

3) Les dérivées partielles de f, à savoir $\dfrac{\partial f}{\partial x} := \dfrac{\mathrm{d}f(\cdot,y)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} := \dfrac{\mathrm{d}f(x,\cdot)}{\mathrm{d}y}$ étant définies sur $\mathbb{R}^2$, calculer leur expression en un point arbitraire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4) Calculer $f(0,0)$ et donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $M(0,0,f(0,0))$.

5) Trouver l'ensemble des points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

6) Représenter par un point: $\bullet$ les points critiques se trouvant dans le rectangle $\mathcal{R} = [-2,2] \times [-2,2]$ du plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un répère orthonormal xOy.

7) Calculer les valeurs de f pour les trois points $(-1,\pm 2)$, $(1,0)$ et montrer qu'il s'agit de points où f admet un maximum local. Compléter la figure en désignant ces points par $\boxdot$.

8) Calculer les valeurs de f pour les trois points $(1,\pm 2)$, $(-1,0)$ et montrer qu'il s'agit de points où f admet un minimum local. Compléter la figure en désignant ces points de minimum de f par $\odot$.

Tourner la page s.v.p. —>

9) On se propose d'étudier la nature des points $(0, \pm 1)$. On commence par $(0, 1)$:

9.1) Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la restriction de f à la droite $D_1 = \{(x, 1-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Écrire son expression et étudier ses variations autour de $x = 0$. Quelle est la nature du point $x = 0$ pour f_1?

9.2) Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la restriction de f à la droite $D_2 = \{(x, 1+x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Écrire son expression et étudier ses variations autour de $x = 0$. Quelle est la nature du point $x = 0$ pour f_2?

9.3) En éduire que le point $(0, 1)$ est un point de selle (point-col) pour f.

9.4)* Peut-on faire le même type de déduction concernant le point$(0, -1)$? Justifier brièvement.
[Indication: on pourrait utiliser la figure déssinée auparavant: voir $(0, 1)$ et $(0, -1)$ comme centres de carrés de coté 2 et observer la nature des points formant les coins d'un tel carré]

10) Rappelons que si $T \in \mathbb{R}$, une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite T-périodique ssi $\forall x \in \mathbb{R}$ on a
$\phi(x) = \phi(x + T)$.

10.1) Montrer que, pour chaque x et chaque y réels, les applications partielles de f, notées $f(x, \cdot)$ et $f(\cdot, y)$ sont 4-périodiques.

10.2)* Utiliser la question précédente pour disposer sur le carré $\widetilde{\mathcal{R}} = [2, 6] \times [-2, 2]$ de la figure les extrema de f. (on utilisera les mêmes symbôles qu'avant: $\boxdot$ pour les max et $\odot$ pour les min)

10.3)* Que peut-on en déduire sur la nature des points critiques $(2, \pm 1)$ du carré $\mathcal{R}$?
[Indication: on pourrait se servir de la figure et de l'indication de la question (9.4)]

10.4)* Décider également de la nature des points critiques $(-2, \pm 1) \in \mathcal{R}$.
[Indication: on pourrait justifier par le même type de raisonnement qu'au deux questions précédentes]

10.5)* Y a-t-il d'autres extrema dans $\mathcal{R}$ hormis ceux trouvés aux questions 7 et 8 ? Justifier.