L1 - "CALCULUS" 2015 - 2016

CORRIGÉ de L'EXAMEN "CALCULUS" SESSION 1 : 17.05.2016

EXERCICE 1

(1) $P = X^2 - 4X + 5 \Rightarrow P' = 2X - 4 = 2(X-2)$

$$I = \int_1^2 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{P'(x)}{P(x)}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln|P(x)|\Big]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|4-8+5| - \ln|1-4+5|\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow \boxed{I = -\frac{1}{2}\ln 2}$$

(2) $P = X^2 - 4X + 4 + 1 = (X-2)^2 + 1^2$

(3) $$J = \int_1^2 \frac{x-3}{x^2-4x+5}\,dx = I - \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2+1^2}\,dx \underset{\substack{u(x)=x-2\\ u'(x)=1}}{=} I - \int_{-1}^0 \frac{dy}{y^2+1}$$

$$= I - \Big[\operatorname{Arctan} y\Big]_{-1}^0 = I - \left(0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{J = -\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right)}$$

(4) On voit que $X^3 - 4X^2 + 5X = X(X^2 - 4X + 5) = XP(X)$.
Par (2), les racines de P sont purement complexes. Donc la décomposition en él. simples "a priori" de F est (sur $\mathbb{R}$) :

$F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{bX+c}{X^2-4X+5}$. Il faut trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$[xF(x)]_{x=0} = \begin{cases} a \\ \left[\dfrac{3x^2-11x+10}{P(x)}\right]_{x=0} = \dfrac{10}{5} = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(xF(x)) = \begin{cases} a+b \\ 3 \end{cases} \Rightarrow a+b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$F(1) = \begin{cases} a + \dfrac{b+c}{2} \\ \dfrac{3-11+10}{1\cdot P(1)} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow 2a+b+c = 2 \Rightarrow \boxed{c = -3}$$

d'où $F(X) = \dfrac{2}{X} + \dfrac{X-3}{X^2-4X+5}$

(5) $$K = \int_1^2 F(x)\,dx = 2\int_1^2 \frac{dx}{x} + J = 2\Big[\ln|x|\Big]_1^2 + J = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}}$$

EXERCICE 2 :

1) $I(t) = \int_1^t \ln(x^2-x+1)\,dx \underset{1=x'}{=} \int_1^t x' \ln(x^2-x+1)\,dx \overset{\text{IPP}}{=}$

$= \left[x \ln(x^2-x+1)\right]_1^t - \int_1^t x\left(\ln(x^2-x+1)\right)'dx$

$= t\ln(t^2-t+1) - \underbrace{\int_1^t \frac{x(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx}_{\hookrightarrow J(t)}$

Pour calculer $J(t)$ on fait la division euclidienne de $x(2x-1)$ par x^2-x+1 et on trouve :

$J(t) = \int_1^t 2\,dx + \int_1^t \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = 2(t-1) + \frac{1}{2}\int_1^t \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}$

$= 2(t-1) + \frac{1}{2}\int_1^t \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int_1^t \frac{1}{x^2-2\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$

$= 2(t-1) + \frac{1}{2}\left[\ln|x^2-x+1|\right]_1^t - \frac{3}{2}\int_1^t \frac{(x-1/2)'}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$

$= 2(t-1) + \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) - \cancel{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_1^t =$

d'où

$$\boxed{J(t) = 2(t-1) + \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) - \sqrt{3}\,\text{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}}$$

---

2) $A(-x) = \frac{\tan(2(-x))}{3+2\sin^2(-x)}\,d(-x) = \frac{-\tan(2x)}{3+\sin^2 x}(-dx) = A(x)$

$A(\pi-x) = \frac{\tan(2\pi-2x)}{3+2\sin^2(\pi-x)}\,d(\pi-x) = \frac{-\tan(2x)}{3+2\sin^2 x}(-dx) = A(x)$

Donc deux sur les trois testes de Broche sont positifs. Donc on pose $\boxed{y=\cos(2x)}$

Pour calculer $F(t)$ on utilise $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = -\frac{1}{2}\frac{(\cos(2x))'}{\cos(2x)}$, d'où

$F(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\cos(2x))'}{\cos(2x)(4-\cos(2x))}\,dx \overset{(y=\cos(2x))}{=} -\frac{1}{2}\int_1^{\cos(2t)} \frac{dy}{y(4-y)}$

Or $\frac{1}{y(4-y)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{4-y} \Rightarrow a = b = \frac{1}{4}$, d'où

$F(t) = -\frac{1}{8}\left(\int_1^{\cos(2t)} \frac{dy}{y} - \int_1^{\cos(2t)} \frac{(4-y)'}{4-y}\,dy\right) = -\frac{1}{8}\left[\ln|y| - \ln|4-y|\right]_1^{\cos(2t)}$

$= \frac{1}{8}\left[\ln\left|\frac{4-y}{y}\right|\right]_1^{\cos(2t)} = \frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{4-\cos(2t)}{\cos(2t)}\right| - \ln 3\right)$

donc

$$\boxed{F(t) = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{4-\cos(2t)}{3\cos(2t)}\right|}$$

EXERCICE 3 :

1) L'equation caractéristique attachée à (E_0) : $y'' - 3y' + 2y = 0$ est $r^2 - 3r + 2 = 0$ avec les racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$ réelles et différentes entre elles. Donc : $\{e^{r_1 \cdot}, e^{r_2 \cdot}\}$ est libre et on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \mathrm{Vect}\{x \mapsto e^x ; x \mapsto e^{2x}\} = \\ &= \{y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y_0(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}}$$

2) Le membre de droite de (E) est du type "polynôme × exponentielle" $P(x) e^{mx}$ où $P(x) = 4(3x+2)$ a le $d^\circ P = 1$ et $m = -1 \neq \begin{cases} 1 = r_1 \\ 2 = r_2 \end{cases}$

Donc d'après un Thm du CM on cherche une sol. particulière de (E) sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^{-x}$ car $d^\circ(aX+b) = 1 = d^\circ P$.

On a : $y_p'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$

$y_p''(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}$ qu'on remplace dans (E)

et on obtient : $(6a - 12)x + (-5a + 6b - 8) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases}$$

Donc la sol. particulière y_p est $y_p(x) = (2x+3)e^{-x}$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{y_p\}$, i.e. $\mathcal{S}$ est l'esp. affine de dim 2,

$$\mathcal{S} = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + (2x+3)e^{-x}, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

EXERCICE 4 (Obs : dans les questions 1, 2 et 10 on verra qu'on peut se faire une idée sur la variation de f par des méthodes de calcul élémentaires et géométriques)

1) On a $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $-1 \leq \sin a \leq 1$ et $-1 \leq \cos b \leq 1$.

Si $\cos b \geq 0$ on multiplie la première par $\cos b$: $-\cos b \leq \sin a \cos b \leq \cos b$

d'où $-1 \leq -\cos b \leq \sin a \cos b \leq \cos b \leq 1$

Si $\cos b \leq 0$ on multiplie $-1 \leq \sin a \leq 1$ par $\cos b = -|\cos b|$ et on a :

$-1 \leq \cos b = -|\cos b| \leq \sin a \cos b \leq |\cos b| \leq 1$

2) Concernant f, elle est du type $(a,b) \mapsto e^{\sin a \cos b}$ et comme l'exponentielle est strictement croissante, elle garde l'ordre "$\leq$".

On a alors : $e^{-1} \leq f \leq e$ sur $\mathbb{R}^2$

3) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sin(\frac{\pi}{2}\cdot)\cos(\frac{\pi}{2}y)}\right)(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) f(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}\left(e^{\sin(\frac{\pi}{2}x)\cos(\frac{\pi}{2}\cdot)}\right)(y) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) f(x,y)$

4) $f(0,0)=e^0=1 \Rightarrow \quad z=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$ i.e.

$z = 1+\frac{\pi}{2}x+0\cdot y \Leftrightarrow \boxed{\pi x - 2z + 2 = 0}$ est l'éq. du plan tangent en M.

5) (x,y) pt critique de f ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

Comme $f(x,y)\neq 0$ $\forall (x,y)$ en tenant compte des formules de (4) :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)=0 \\ \text{et} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in 2\mathbb{Z}+1 \text{ ou } y\in 2\mathbb{Z}+1 \\ \text{et} \\ x\in 2\mathbb{Z} \text{ ou } y \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in (2\mathbb{Z}+1)\times 2\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}\times(2\mathbb{Z}+1)$$

6) Dans $\mathcal{R}=[-2,2]\times[-2,2]$ se trouvent ainsi 12 points critiques (voir figure, où nous avons délimité $\mathcal{R}$ par des pointillés)

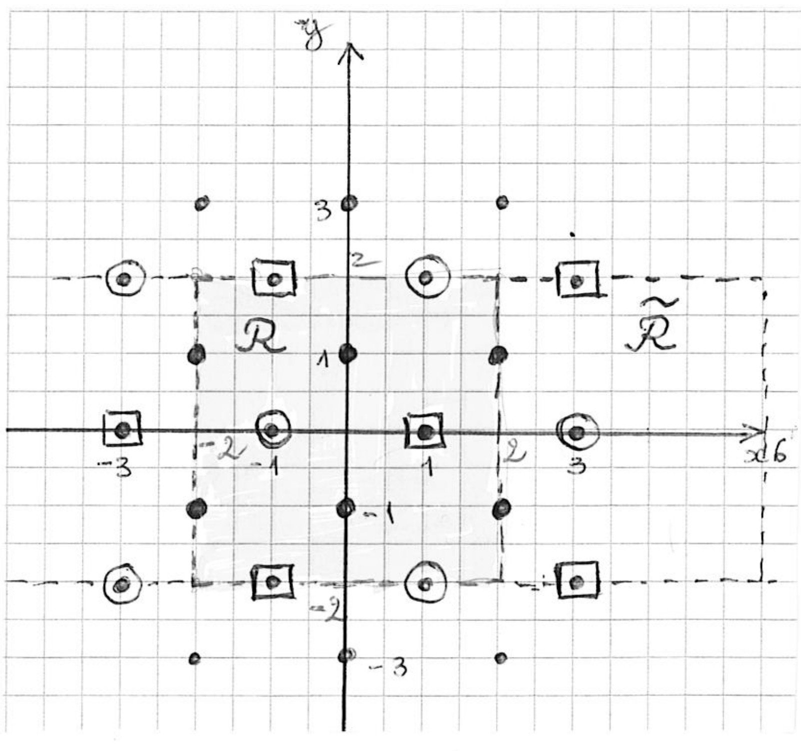
7) $$\begin{cases} f(-1,\pm 2) = e^{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pm\pi)} = e^1 = e \\ f(1,0) = e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(0)} = e^1 = e \end{cases}$$

Donc $(-1,\pm 2)$ et $(1,0)$ sont des points où f atteint sa valeur max.

8) Pareillement, $$\begin{cases} f(1,\pm 2) = e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pm\pi)} = e^{1\cdot(-1)} = e^{-1} \\ f(-1,0) = e^{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(0)} = e^{(-1)\cdot 1} = e^{-1} \end{cases}$$

donc f atteint en ces 3 points sa valeur minimale e^{-1}.

Pour les deux cas, max/min on a complété la figure en entourant les points de (6) par un carré : $\bullet \rightsquigarrow \boxed{\bullet}$ et ceux de (7) par un cercle $\bullet \rightsquigarrow \odot$.



9) On remarque que dans le rectangle $\mathcal{R}=[-2,2]\times[-2,2]$ il nous restent encore 6 points "$\bullet$" qui n'ont pas été entourés. On s'occupe d'abord de $(0,1)$

9.1 $f_1 \overset{\text{not}}{=} f|_{D_1}$ = restriction de f à la droite D_1 du plan $\mathbb{R}^2$.

Donc $f_1(x)=f(x,1-x)$ par définition. On obtient :

$f_1(x) = e^{\sin(\frac{\pi}{2}x)\cos(\frac{\pi}{2}(1-x))} = e^{\sin(\frac{\pi}{2}x)\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x)} = e^{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}$

On pourrait observer que $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ nous donne aussi:

$f_1(x) = \sqrt{e}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cos(\pi x)}$ d'où $f_1'(x) = \frac{\pi}{2}\sqrt{e}\sin(\pi x)e^{-\frac{1}{2}\cos(\pi x)}$

donc $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ (dont $x=0$)

Ensuite, $f_1''(x) = \left(\frac{\pi}{2}\sin(\pi x) f(x)\right)' = \frac{\pi^2}{2}\left(\cos(\pi x) + \frac{1}{2}\sin^2(\pi x)\right) f_1(x)$

Donc $f_1''(0) = \frac{\pi^2}{2}(1+0)\cdot f_1(0) = \frac{\pi^2}{2} > 0$.

Conclusion : $x=0$ est bien un minimum pour f_1.

9.2 $f_2(x) := f|_{D_2}(x;y) = f(x, 1+x) = e^{\sin(\frac{\pi}{2}x)\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}x)}$

$= e^{-\sin^2(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{\frac{1}{2}\cos(\pi x)}$

$f_2'(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{e}}\sin(\pi x) e^{1/2\cos(\pi x)} \underset{\text{obs}}{=} -\frac{\pi}{2}\sin(\pi x) f_2(x)$

$f_2'(x) = 0 \underset{f_2(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ (dont $x=0$)

$f_2''(x) = -\frac{\pi^2}{2}\left(\cos(\pi x) - \frac{1}{2}\sin^2(\pi x)\right) f_2(x)$ d'où

$f_2''(0) = -\frac{\pi^2}{2}(1-0) f_2(0) = -\frac{\pi^2}{2} < 0$

Conclusion : $x=0$ est bien un point de maximum pour f_2.

9.3 Nous allons montrer que $(0,1)$ est un point-selle (ou point-col) pour f en montrant que dans tout voisinage de $(0,1)$ (aussi petit que l'on veut) il existent des points (x,y) où la valeur de f est plus grande que $f(0,1)$ et d'autres points (x,y) où la valeur de f est plus petite que $f(0,1)$. Pour $\forall \varepsilon > 0$:

$$\mathring{B}((0,1);\varepsilon) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2 < \varepsilon^2\}$$

est un tel voisinage (disque centré sur $(0,1)$) arbitrairement petit)

Si $(x,y) \in D_1 \cap \mathring{B}((0,1);\varepsilon)$ on a $x^2 + (\cancel{1}-x-\cancel{1})^2 < \varepsilon^2$

i.e. $|x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Or, on sait que $f_1 = f|_{D_1}$ admet un minimum en $x=0$, i.e. $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$ $\forall x$ t.q. $|x| < \tilde{\varepsilon}$ on a $f_1(x) \geq f_1(0)$

On choisit alors $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\sqrt{2}$ et on en déduit ainsi que

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (x,y) \in B((0,1), \varepsilon)$ (à savoir des pts du type $(x, 1-x)$) tels que $f(x,y) \geq f(0,1)$. $(*)$

De même, si $(x,y) \in D_2 \cap \mathring{B}((0,1);\varepsilon)$ on a $x^2 + (\cancel{1}+x-\cancel{1})^2 < \varepsilon^2$ i.e. $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Or, on sait que $f_2 = f|_{D_2}$ admet un maximum en $x = 0$, i.e. $\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \forall x$ t.q. $|x| < \tilde{\varepsilon}$ on a $f_2(x) \leq f_2(0)$.
En choisissant $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\sqrt{2}$ on déduit ainsi que :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (x,y) \in \mathring{B}((0,1);\varepsilon)$ (à savoir des points du type $(x, 1+x)$) tels que $f(x,y) \leq f(0,1)$. $(**)$

De $(*)$ et $(**)$ on déduit que $(0,1)$ est un point-selle pour f.

(9.4.) On peut, bien sûr, trouver deux autres droites, parallèles à D_1 et D_2 de (8.3) et passant par $(0,-1)$ pour refaire le même argument qu'à (8.3) et aboutir à la même conclusion. MAIS, on peut aussi remarquer que les points $(0, \pm 1)$ se trouvent à l'intersection des diagonales d'un carré où les bouts de ces diagonales ont la même nature : ce sont pour l'une des max de f et pour l'autre des min de f. (voir figure). Bien sûr, cet argument n'est pas rigoureux mais il met en évidence un "patron" (une situation qui nous permet de voir facilement que $(0,+1)$ et $(0,-1)$ sont points-selle)

(10.1)
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{cases} f(x+4,y) = e^{\sin(\frac{\pi}{2}x + 2\pi)\cos(\frac{\pi}{2}y)} = f(x,y) \\ f(x,y+4) = e^{\sin(\frac{\pi}{2}x)\cos(\frac{\pi}{2}y+2\pi)} = f(x,y) \end{cases}$$

(10.2) De (9.1) on déduit en particulier :
$$\left.\begin{array}{l} e = f(1,0) = f(1+4k,0) = f(1+4k, 4k') \\ e^{-1} = f(-1,0) = f(-1,+4k,0) = f(-1+4k, 4k') \end{array}\right\} \forall (k,k') \in \mathbb{Z}^2$$
ce qui nous donne un maillage sur tout le $\mathbb{R}^2$ des pts de max/min de f.
Et ça nous permet donc de compléter $\tilde{R}$ avec ce genre de points.

(10.3) On voit que $(2, \pm 1)$ sont aussi des intersections de diagonales de carrés de coté $= 2$ qui respectent le "patron" de (8.4)

(10.4) $\tilde{\tilde{R}}$, symmétrique de $\tilde{R}$ par rapp. à Oy peut être complété avec des min et max pareillement, d'où on déduit que $(-2, \pm 1)$ sont points-selle

(10.5) $(2, \pm 1)$ et $(-2, \pm 1)$ sont points-selle donc il n'y a pas d'extrémas dans R autres que ceux des questions (6) et (7) car tous les pts critiques ont été discutés.