L1 - "Calculus" - 2014/2015 - **Examen du 19 juin 2015** - Session 2

Examen de Mathématiques "Calculus"

Durée: **2** heures – les documents, calculatrices, téléphones, smartphones et tablettes ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 : Soit le polynôme $P = X^2 - 2X + 4$.

1) Calculer l'expression du polynôme dérivé P'. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x$.

2) Mettre le polynôme P sous la forme $(aX+b)^2 + c^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à trouver.

3) Se servir des questions précédentes pour calculer la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x$.

(Indication: on pourrait mettre le polynôme 2X+1 sous forme d'une expression ne dépendant que de P').

Exercice 2 : On veut calculer la primitive $I(t) = \displaystyle\int_1^t x\ln(2x^2-1)\,\mathrm{d}x$ pour $t > 1$.

1) Faire la division euclidienne de X^3 par $2X^2 - 1$ et en déduire la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{X^3}{2X^2-1}$.

2) En déduire l'expression de $I(t)$. (Indication: IPP)

Exercice 3 : Soit $R(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ où $f(x) = (2 + \tan^2 x)\sin(2x)$.

1) Calculer $R(-x)$, $R(\pi + x)$ et les comparer à $R(x)$. En déduire le plus efficace changement de variables pour le calcul de la primitive $F(t) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^t f(x)\,\mathrm{d}x$. (Indication: règles de Bioche)

2) Calculer l'expression de $F(t)$ si $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(Indication: on pourra utiliser la formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$)

Exercice 4 : On veut trouver l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient l'équation différentielle du 2-ème ordre

$(\mathcal{E}) : \quad y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x + \cos(2x)$.

1) Soit $(\mathcal{E}_0) : \quad y'' + y' - 2y = 0$ l'équation sans second membre attachée à $(\mathcal{E})$. Trouver l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions y_0 de $(\mathcal{E}_0)$.

2) Trouver une solution particulière de équation:

$(\mathcal{E}_1) : \quad y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$.

3) Soit l'équation:

$(\mathcal{E}_2) : \quad y'' + y' - 2y = \cos(2x)$.

3.a) Justifier pourquoi $x \mapsto A(x)\cos(2x) + B(x)\sin(2x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$ fournit une solution particulière de $(\mathcal{E}_2)$. Dire aussi pourquoi, dans ce cas précis, on peut prendre A et B constants.

(Indication: $(\mathcal{E}_2)$ pourrait être vue comme partie réelle de l'équation complexe $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{2ix}$)

3.b) Trouver les constantes A et B, et en déduire ainsi une solution particulière de $(\mathcal{E}_2)$.

4) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$. (Indication: principe de superposition des solutions)

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^2y + y^2 + 4y + 8$. Notons par G_f le graphe de f, défini par $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } z = f(x, y)\}$.

1) Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f en chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Vérifier que le point $M(-1, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$ appartient au graphe de f et donner l'équation du plan tangent au graphe G_f en ce point.

3) Montrer que le seul point critique de f est $(0, -2)$. Calculer la valeur de f en ce point.

4) Montrer que le point critique $(0, -2)$ est point de selle pour f.

(Indication: on pourra étudier les variations des fonctions partielles $y \mapsto f(0, y)$ et $x \mapsto f(x, -2)$ autour des points $y = -2$, et $x = 0$, respectivement).

5) Peut-on dire que f admet un extremum (minimum ou maximum) *global* sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle bornée supérieurement et/ou inférirurement sur $\mathbb{R}^2$?