L1-S2 - 2014/2015 (19 juin 2015)

CORRIGÉ de l'EXAMEN de "CALCULUS" SESSION 2

EXERCICE 1 : 1) $P' = 2X - 2 = 2(X-1)$

$$I = 2\int_0^1 \frac{P'(x)}{P(x)}\,dx = 2\Big[\ln(|P(x)|)\Big]_0^1 =$$

(Obs : $P(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ car les racines sont complexes et $P(0) = 4 > 0$, donc $|P(x)| = P(x)$)

$$= 2\Big[\ln(P(x))\Big]_0^1 = 2(\ln 3 - \ln 4) = 2\ln\left(\frac{3}{4}\right).$$

2) $P(X) = X^2 - 2X + 1 + 3 = (X-1)^2 + (\sqrt{3})^2$

donc $a = 1 = -b$, $c = \sqrt{3}$.

3) $$J = \int_0^1 \frac{(2x-2)+3}{x^2-2x+4}\,dx = I + 3\int_0^1 \frac{dx}{P(x)}$$

or $$\int_0^1 \frac{dx}{P(x)} \underset{(2)}{=} \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2} \underset{y=x-1}{=} \int_{-1}^0 \frac{dy}{y^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\frac{y}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(0 - \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$$

Donc $\boxed{J \underset{(1)}{=} 2\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$

EXERCICE 2 : 1) $$\frac{X^3}{2X^2-1} = \frac{1}{2}\,\frac{(2X^3-X)+X}{2X^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\,\frac{X}{2X^2-1} \underset{\text{a priori}}{=} \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}X-1} + \frac{b}{\sqrt{2}X+1}\right)$$

En multipliant $\frac{X}{2X^2-1}$ par $\sqrt{2}X \mp 1$ et en donnant à x les valeurs $1/\sqrt{2}$ et $-1/\sqrt{2}$ respectivement, on déduit $a = b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Donc on a finalement :

$$\frac{X^3}{2X^2-1} = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}X-1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}X+1}.$$

2) $$I(t) = \int_1^t \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln(2x^2-1)\,dx \overset{IPP}{=}$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(2x^2-1)\right]_1^t - \int_1^t \frac{x^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{2\cancel{4}x}{2x^2-1} \underset{(1)}{=}$$

$$= \frac{t^2}{2}\left(\ln(2t^2-1)\right) - 0 - \int_1^t \left(x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}x-1} + \frac{1}{\sqrt{2}x+1}\right)\right)dx$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln(2t^2-1) - (t-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}\int_1^t \left(\frac{(\sqrt{2}x-1)'}{\sqrt{2}x-1} + \frac{(\sqrt{2}x+1)'}{\sqrt{2}x+1}\right)dx$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln(2t^2-1) + (1-t) + \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\ln(\sqrt{2}x-1) + \ln(\sqrt{2}x+1)}_{\ln(2x^2-1)}\Big]_1^t$$

$$= \frac{1}{2}\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)\ln(2t^2-1) + 1 - t$$

EXERCICE 3 :

1) $f(x)$ est impaire donc $R(x) = f(x)\,dx$ est paire : $R(-x) = R(x)$.

Aussi $\tan(\pi + x) = \tan x$ et $\sin(2(\pi + x)) = \sin(2\pi + 2x) = \sin(2x)$

donc, comme $d(\pi + x) = dx$, on a :

$R(\pi + x) = R(x)$.

Donc les règles de Bioche indiquent pour ce cas, où 2 critères sur 3 sont remplis, le chgt. de var. : $y = \cos(2x)$.

On aura donc $dy = -2\sin(2x)\,dx$

2) On veut mettre $R(x)$ seulement en fonction de $\cos(2x)$ et de sa dérivée :

$$f(x) = (2+\tan^2 x)\sin(2x) = \left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\frac{1}{-2}(\cos(2x))'$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1+\cos(2x)}\right)\cdot(\cos(2x))'$$

Donc, en posant $y=\cos(2x)$ on obtient

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\cos(2t)}\left(1+\frac{2}{1+y}\right)dy =$$
$$= -\frac{1}{2}\Big[y + 2\ln|1+y|\Big]_0^{\cos(2t)}, \text{ d'où}$$

$$\boxed{F(t) = -\frac{\cos(2t)}{2} - \ln(1+\cos(2t))}$$

On observe que si t était égal à $\pi/2$ (ce qui est exclu par l'hypothèse) on aurait $1+\cos\pi=0$ ce qui fait que $\ln$ ne serait pas fini (en fait.. défini !). Donc $t\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ est judicieusement choisi.

EXERCICE 4 :

1) Éq. caractéristique : $r^2+r-2=0 \iff$
$\iff (r-1)(r+1)+(r-1)=0 \iff (r-1)(r+2)=0$
donc les racines sont réelles et distinctes, donc ~~toute~~ sol. de $(\mathcal{E}_0)$ est du type :

$$y_0(x) = \lambda e^{1\cdot x} + \mu e^{(-2)\cdot x}, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$
$$\forall x\in\mathbb{R}.$$

Donc $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\{x\mapsto e^{x}; x\mapsto e^{-2x}\}$

2) Pour $(\mathcal{E}_1)$: le m. de droite est du type polynôme $\times$ exp. : $P(x)e^{mx}$ où $P(X)=1$ (donc $d^0P=0$) et $m=1=r_1\neq -2=r_2$

On propose alors $y_p(x) = Q(x)e^{x}$ où d^0Q est égal à $d^0P+1=0+1=1$. Donc $Q(x)=\alpha x+\beta$.

Alors $y_p'(x) = e^{x}(\alpha x+\alpha+\beta)$
$y_p''(x) = e^{x}(\alpha x+2\alpha+\beta)$

d'où, en remplaçant en $(\mathcal{E}_1)$:

$$e^{x}(\cancel{\alpha x}+2\alpha+\cancel{\beta}+\cancel{\alpha x}+\alpha+\cancel{\beta}-\cancel{2\alpha x}-\cancel{2\beta}) = e^{x}$$

$\underset{\substack{e^x\neq 0\\ \forall x}}{\iff} 3\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{3}$

Comme il n'y a de spécification sur β et qu'on cherche une sol. partic., on peut choisir $\beta=0$. D'où : $y_p(x) = \frac{1}{3}xe^{x}$

Pour $(\mathcal{E}_2)$: En voyant $(\mathcal{E}_2)$ comme partie réelle de $(\tilde{\mathcal{E}}_2)$: $y''+y'-2y = e^{(2i)x}$ dont le m. de droite est du type exp $\times$ polynôme où $P(x)=1$ et exp : $e^{(2i)x}$ donc ici $m=2i\neq r_1$ et $\neq r_2$, on déduit qu'on peut proposer comme sol. part. de $(\tilde{\mathcal{E}}_1)$: $\tilde{y}_p(x) = \tilde{Q}(x)e^{(2i)x}$ où

$d^\circ\widetilde{Q} = d^\circ P = 0$ donc $\widetilde{Q} = \text{cte} \in \mathbb{C}$.

Ceci suggère que, pour sa partie réelle on peut proposer $y_p(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$

Alors $y_p'(x) = -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x)$

$y_p''(x) = -4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x)$

qu'on remplace dans $(\mathcal{E}_1)$ et on a :

$-4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x) +$

$+2\beta\cos(2x) - 2\alpha\sin(2x) -$

$-2\alpha\cos(2x) - 2\beta\sin(2x) = \cos(2x)$

$\Longleftrightarrow (+1 + 6\alpha - 2\beta)\cos(2x) +$

$+ 2(\alpha + 3\beta)\sin(2x) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $\{\sin, \cos\}$ syst libre $\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 6\alpha - 2\beta = -1 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -20$; $\alpha = -\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{20} = +\dfrac{3}{20}$; $\beta = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{-20} = \dfrac{1}{20}$

Donc $y_p(x) = \frac{1}{20}(3\cos(2x) + \sin(2x))$.

3) Cf. principe de superposition des solutions,

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{y_{p,1} + y_{p,2}\}$

Donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{x \mapsto \frac{1}{3}xe^x + \frac{1}{20}(3\cos(2x) + \sin(2x))\}$

EXERCICE 5 : 1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x^2 + y + 2)$

2) $f(-1,-1) = -2 + 1 - 4 + 8 = 3$. L'éq. du plan tangent :

$z = f(-1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1)(x-(-1)) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1)(y-(-1))$

$\Longleftrightarrow 4x + 4y - z + 11 = 0$

3) (x,y) est pt. critique ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

$\Longleftrightarrow 4xy = 0$ et $x^2 + y + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et $y = -2$ ou $y = 0$ et $x^2 = -2$ (impossible)

Donc $(0,-2)$ est le seul pt. critique

4) $f(0,y) = y^2 + 4y + 8 = (y+2)^2 + 2^2 \geq 2^2 = 4 = f(0,-2)$

donc $y = -2$ est pt. de minimum pour l'application partielle $y \mapsto f(0,y)$.

$f(x,-2) = -4x^2 + 4 \leq 4 = f(0,-2)$

donc $x = 0$ est pt. de maximum pour l'applic. partielle $x \mapsto f(x,-2)$.

Donc $(0,-2)$ est un pt. de selle pour f.

5) f est bien définie sur tout le $\mathbb{R}^2$, qui est un domaine sans bords, donc si f admettait des extremas ceux-ci seraient parmi les pts critiques, or ce n'est pas le cas (voir (3) & (4)). Donc f n'admet pas d'extrema (ni locaux, ni globaux).

Non, f n'est pas bornée ni inf. ni sup. : Soit $y_\pm = \pm 1$. Alors les applic. partielles $f_\pm(x) = f(x, \pm 1) \sim \pm 2x^2$ quand $x \to \infty$ donc $\lim_{x\to\infty} f_\pm(x) = \pm\infty$.