L1 - S2 - 2014-2015 SESSION 1

CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHS "CALCULUS"

EXERCICE 1 :

(1.a) $P(-1) = -1+2-2+1 = 0$. $P(X)$ est donc divisible par $X+1$. Par division euclidienne on trouve $P(X) = (X+1)(X^2+X+1)$.

(1.b) Décomposition "a priori" (unique) de $F(X)$:

$$F(X) = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2+X+1}, \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \text{ à trouver :}$$

$$\alpha = \Big[(x+1)F(x)\Big]_{x=-1} = \frac{2(-1)+3}{(-1)^2+(-1)+1} = 1$$

$$F(0) = \alpha + \gamma \iff \gamma = 3 - \alpha = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} xF(x) = \alpha \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} + \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\beta + \frac{\gamma}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \iff$$

$$\iff 0 = \alpha + \beta \iff \beta = -\alpha = -1$$

Donc $$F(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2+X+1}$$

(1.c) $$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1-5}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}(A+B) \text{ où}$$

$$A = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx = \Big[\ln|x^2+x+1|\Big]_0^1 = \ln 3$$

$$B = \int_0^1 \frac{-5}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{-5\,dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= -5\int_0^1 \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)'dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -5\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_0^1$$

$$= -\frac{10}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = -\frac{10}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{3} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= -\frac{10}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}. \text{ Donc}$$

$$J = \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \frac{5\pi}{3\sqrt{3}}\right).$$

(1.d) : $$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - J = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 - J$$

donc $$I = \ln\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5\pi}{6\sqrt{3}}.$$

EXERCICE 2 :

(1) $x \mapsto \cos x \ln(1+\cos x)$ est paire donc

$$I(t) = 2\int_0^t \cos x \ln(1+\cos x)\,dx = 2\int_0^t (\sin x)' \ln(1+\cos x)\,dx$$

$$\overset{\text{IPP}}{=} 2\Big[\sin x \ln(1+\cos x)\Big]_0^t - 2\int_0^t \frac{\sin x\,(1+\cos x)'}{1+\cos x}\,dx$$

$$= 2\sin t \ln(1+\cos t) + 2\int_0^t \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx$$

$$= 2\sin t \ln(1+\cos t) + 2\int_0^t \frac{\cancel{(1+\cos x)}(1-\cos x)}{\cancel{1+\cos x}}\,dx$$

$$= 2\sin t \ln(1+\cos t) + 2(t - \sin t)$$

$$= 2\big(t + \sin t\,(\ln(1+\cos t) - 1)\big).$$

(2) $$J(t) = \int_0^t e^{2x}\,\frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^t e^{2x}\cos(2x)\,(2x)'\,dx$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^t e^{2x}(2x)'\,dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y = 2x \\ dy = (2x)'dx \end{array}} = \frac{1}{4}\left(\int_0^{2t} e^y \cos y\,dy + \int_0^{2t} e^y\,dy\right)$$

$$\int_0^{2t} e^y \cos y\,dy \underset{\text{IPP}}{=} \Big[e^y \cos y\Big]_0^{2t} + \int_0^{2t} e^y \sin y\,dy \overset{\text{IPP}}{=}$$

$$= \left[e^y(\cos y + \sin y)\right]_0^{2t} - \int_0^{2t} e^y \cos y\, dy$$

d'où $\int_0^{2t} e^y \cos y\, dy = \frac{1}{2}\left[e^y(\cos y + \sin y)\right]_0^{2t}$

Donc $J(t) = \frac{1}{4}\left[e^y\left(\frac{\cos y + \sin y}{2} + 1\right)\right]_0^{2t}$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2t}\left(\frac{\cos(2t)+\sin(2t)}{2} + 1\right) - \frac{3}{2}\right)$$

Obs : pour le calcul de $\int_0^{2t} e^y \cos y\, dy$ on peut aussi observer que celle-ci est la partie réelle de $\int_0^{2t} e^y e^{iy} dy = \int_0^{2t} e^{(1+i)y} dy =$

$= \frac{1}{1+i}\int_0^{2t}\left(e^{(1+i)y}\right)' dy = \frac{1-i}{2}\left[e^{(1+i)2t} - 1\right]$

$= \frac{1}{2}(1-i)\left((e^{2t}\cos 2t - 1) + i\, e^{2t}\sin 2t\right)$

$= \frac{1}{2}\left((e^{2t}\cos(2t) - 1 + e^{2t}\sin(2t)) + i\left(e^{2t}(\sin 2t - \cos 2t)\right)\right)$

D'où $\int_0^{2t} e^y \cos y\, dy = \frac{1}{2}\left(e^{2t}(\cos(2t) + \sin(2t)) - 1\right)$.

③ (3.a) On constate que $R(-x) = R(\pi + x) = R(x)$ donc le meilleur changement de variable indiqué par les règles de Bioche est $y = \cos(2x)$.

~~Alors~~ $\cos^4 x + \sin^4 x = \left(\frac{\cos(2x)+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2$

$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}_2}\left(\cos^2(2x) + 1\right)$. Donc, comme $dy = -2\sin(2x)\,dx$

$F(t) = -\frac{1}{2}\int_1^{\cos(2t)} \frac{dy}{\frac{1}{2}(y^2+1)} = -\left[\operatorname{Arctan} y\right]_1^{\cos(2t)}$

donc $F(t) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}(\cos(2t))$.

EXERCICE 3 :

① (E) : $y'' - 2y' + y = x$

(E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$ est l'éq. sans second membre dont l'éq. caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$ (racine double)

Donc $\mathcal{S}_0 = \{y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y_0(x) = (\lambda + \mu x)e^x, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \operatorname{Vect}\{x \mapsto e^x ; x \mapsto x e^x\}$

Pour trouver une solution particulière de (E) on remarque que le membre de droite est du type polynôme × exponentielle : $x = P(x)\, e^{0\cdot x}$ où $P(x) = x$ a le $d^\circ = 1$ et comme $0 \neq r_1 = r_2 = 1$ on propose $y_p(x) = Q(x)\, e^{0\cdot x}$ avec $d^\circ Q = d^\circ P = 1$.

En posant donc $y(x) = (ax+b)\cdot e^{0\cdot x} = ax + b$ dans (E) on a : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$0 - 2a + ax + b = x \Leftrightarrow (a-1)x + (b-2a) = 0$

$\underset{\forall x}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ donc $y_p(x) = x + 2$, d'où

$\mathcal{S} = \{x \mapsto x + 2\} + \mathcal{S}_0$.

② (E) : $y' + \left(-\frac{2\ln x}{x}\right) y = x^{\ln x - 1}$

On s'occupe d'abord de

(E_0) : $y' + \left(-\frac{2\ln x}{x}\right) y = 0$, dont "la" solution est : $y_0(x) = \lambda e^{-\int \frac{2\ln x}{x}dx}$

Or $\int \frac{2\ln x}{x}dx = \int 2(\ln x)(\ln x)'dx =$

$= \int (\ln^2 x)'dx = \ln^2 x$.

d'où $y_0(x) = \lambda e^{\ln^2 x} = \lambda (e^{\ln x})^{\ln x} = \lambda x^{\ln x}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\{]e,\infty[\ni x \mapsto x^{\ln x}\}$ est l'e.v. des solutions de (E_0).

Pour trouver une solution particulière y_p de (E) on la propose sous la forme $y_p = \lambda y_0$ où y_0 = solution de (E_0) et λ = fonction inconnue. En remplaçant y_p dans (E) on obtient finalement (par "variation de la cte") :

$$\lambda' y_0 = x^{\ln x - 1} \iff x^{\ln x}\left(\lambda' - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\underset{x\in]e,\infty[}{\iff} \lambda' = \frac{1}{x} \implies \lambda(x) = \ln x + cte.$$

Donc $y_p(x) = \ln x \cdot x^{\ln x}$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \{x \mapsto \ln x \cdot x^{\ln x}\} + \mathcal{S}_0$.

$= \{y :]e,\infty[\to \mathbb{R} \,/\, y(x) = (\lambda + \ln x)x^{\ln x} \;\forall \lambda \in \mathbb{R}\}$

EXERCICE 4 :

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(2x^2-1)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(2y^2-1)$

(2) $f(1,1) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$ donc l'éq. plan tan : $\boxed{2x + 2y - z = 4}$

(3) (x,y) = pt. critique ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

$\iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ y = 0 \text{ ou } y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \{0, \frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\} \\ \text{et} \\ y \in \{0, \frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\} \end{cases} \iff$

$\mathcal{C} = \{(0,0) ; (0, \pm\frac{1}{\sqrt2}) ; (\pm\frac{1}{\sqrt2}, 0) ; (\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}) ; (\pm\frac{1}{\sqrt2}, \mp\frac{1}{\sqrt2})\}$

ens. des pts critiques de f. Il est formé de 9 pts.

(4) $f(x,y) = (x^4 - x^2 + \frac{1}{4}) + (y^4 - y^2 + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} =$

$= (x^2 - \frac{1}{2})^2 + (y^2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$

Or $f(\pm\frac{1}{\sqrt2} ; \pm\frac{1}{\sqrt2}) = f(\pm\frac{1}{\sqrt2} ; \mp\frac{1}{\sqrt2}) = -\frac{1}{2}$

Donc f admet en ces 4 points un minimum local.

(5) $f(0,0) = 0$. On pose $t = x^2$, $s = y^2$ et alors

$f(x,y) = (x^4 - x^2) + (y^4 - y^2) = (t^2 - |t|) + (s^2 - |s|)$

$\leq 0 = f(0,0)$ car $t^2 \leq |t|$ et $s^2 \leq |s|$ quand (t,s) est dans un voisinage de $(0,0)$.

Donc f a un maximum local en $(0,0)$.

(6) $f(x, \frac{1}{\sqrt2}) = (x^4 - x^2) - \frac{1}{4} = (t^2 - |t|) - \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4} = f(0, \frac{1}{\sqrt2})$

donc l'applic. partielle $f(\cdot, \frac{1}{\sqrt2})$ a un max en $x = 0$.

$f(0,y) = y^4 - y^2 = y^4 - 2\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (y^2 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}$

$\geq -\frac{1}{4} = f(0, \frac{1}{\sqrt2})$

donc l'applic. partielle $f(0, \cdot)$ a un min en $y = \frac{1}{\sqrt2}$

Conclusion : $(0, \frac{1}{\sqrt2})$ est un point de selle pour f.

(7) Comme dom $f = \mathbb{R}^2$, il n'y a pas d'extrema sur le bord, donc les seuls sont ceux trouvés aux quest. 4) et 5).

Mais $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,y) = \infty$ montre que en $(0,0)$ on n'a pas de max global.

Aussi, $f(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}) = f(\mp\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2})$ montre que ds. ces 4 points on a max globaux mais non-stricts.