2024-2025
Licence 1 MIPI
Analyse 2

Examen (session 2)

le 25 juin 2025
Durée : 2h
Chaque réponse doit être justifiée
Les calculatrices et les documents sont interdits

Exercice 1. (7 points) Questions de cours

(a) (1 point) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

(b) (2 points) (**Preuve du cours**) Démontrer que toute suite convergente est bornée.

(c) (1 point) Donner un exemple d'une suite décroissante qui ne converge pas, avec une justification rapide †.

(d) (1 point) Énoncer le théorème des accroissements finis.

(e) (2 points) (**Preuve du cours**) Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Démontrer que si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$, alors f est croissante sur I.

Solution

(a)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

(b) Soit (u_n) une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon = 1$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| < 1$. Cela implique :

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$$

pour $n \geq N$.

Les termes $u_0, \ldots, u_{N-1}$ étant en nombre fini, on peut poser

$$M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq M$, donc la suite est bornée.

(c) Un exemple est $u_n = -n$. Cette suite est clairement décroissante et tend vers $-\infty$, donc elle ne converge pas.

(d) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

†. Il peut arriver que vous ayez choisi un exemple trop compliqué pour permettre une justification rapide. Dans ce cas, il faut fournir une justification complète ou chercher un exemple plus simple.

(e) Supposons que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$. Montrons que f est croissante sur I.

Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. La fonction f est continue sur $[x, y] \subset I$ et dérivable sur $]x, y[\subset \mathring{I}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Comme $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$, on obtient $f(y) - f(x) \geq 0$.

Donc f est croissante sur I.

Exercice 2. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n}.$$

(a) (1 point) Calculer* la limite de la suite (u_{6n}).

(b) (1 point) Calculer* la limite de la suite (u_{6n+1}).

(c) (1 point) Calculer* la limite de la suite (u_{3n}).

Solution :

(a) On a :

$$u_{6n} = \cos\left(\frac{6n\pi}{3}\right) + \frac{1}{6n} = \cos(2n\pi) + \frac{1}{6n} = 1 + \frac{1}{6n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

(b) On a :

$$u_{6n+1} = \cos\left(\frac{(6n+1)\pi}{3}\right) + \frac{1}{6n+1} = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{6n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

(c) On a :

$$u_{3n} = \cos\left(\frac{3n\pi}{3}\right) + \frac{1}{3n} = \cos(n\pi) + \frac{1}{3n} = (-1)^n + \frac{1}{3n}.$$

La sous-suite correspondante pour n pair tend vers 1, tandis que celle pour n impair tend vers -1.

Donc la suite (u_{3n}) n'admet pas de limite.

Remarque : Dans cet exercice, il est inutile d'utiliser le théorème des gendarmes ou de rappeler que cos est compris entre -1 et 1.

*. On ne sait pas a priori si la limite existe. Chaque fois qu'on pose la question « Calculer la limite », il est demandé soit de donner la valeur de la limite et de justifier que cette valeur est correcte, soit de démontrer que la limite n'existe pas.

Exercice 3. (2 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(n) + 2 + u_n.$$

(a) (1 point) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(b) (1 point) Calculer* la limite de la suite (u_n).

Solution :

(a) On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sin(n) + 2 \geq -1 + 2 = 1.$$

Donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.

(b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante.

Une suite réelle croissante présente deux cas possibles :

- soit elle est majorée, et alors elle converge ;
- soit elle n'est pas majorée, et dans ce cas elle tend vers $+\infty$.

Démontrons par l'absurde que la convergence est impossible. Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite réelle $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\sin(n) + 2 = u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0.$$

C'est absurde, car $\sin(n) + 2 \geq 1$ pour tout n. Donc notre hypothèse était fausse, et la suite (u_n) ne converge pas.

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Remarque : La définition de la suite n'est pas de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Il est donc inutile d'introduire une fonction f. Il est également inutile d'utiliser un raisonnement par récurrence dans cet exercice.

Exercice 4. (6 points)

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) (1 point) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) (1 point) Étudier la continuité de f en 0.

(c) (1 point) Étudier la dérivabilité de f en 0.

(d) (1 point) Préciser le domaine de définition de la fonction dérivée f', puis donner une expression explicite de f' sur ce domaine.

(e) (1 point) Étudier la dérivabilité de f' en 0.

(f) (1 point) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ a au moins une solution.

Solution :

(a) Sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a $f(x)=x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, qui est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Donc f est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(b) On étudie la continuité de f en 0. Pour $x\neq 0$, on a $f(x)=x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or :

- $x^3\to 0$ quand $x\to 0$;
- $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée.

Donc $x^3\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$. Mais $f(0)=0$, donc

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0),$$

ce qui prouve que f est continue en 0.

(c) On calcule la dérivée de f en 0 à l'aide de la définition :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Plus précisément, cette limite vaut 0 car :

- $x^2\to 0$ quand $x\to 0$;
- $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

(d) On a vu dans les questions (a) et (c) que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour $x\neq 0$, on dérive l'expression $f(x)=x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ par la règle du produit :

$$f'(x)=3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^3\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)=3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a donc :

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

(e) On cherche à savoir si f' est dérivable en 0. Pour $x\neq 0$, on a :

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{f'(x)}{x}=\frac{3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=3x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On sait que :

- $3x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$ quand $x\to 0$;
- $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand $x\to 0$.

Pour le justifier, on peut par exemple considérer les deux suites :

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(2\pi n) = 0, \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Donc la limite n'existe pas, et f' n'est pas dérivable en 0.

(f) On a $f(0) = 0 < 1$, et

$$f(2) = 8\cos\left(\frac{1}{2}\right) > 8\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 > 1.$$

La fonction f est continue sur $[0,2]$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[0,2]$.

Exercice 5. (4 points)

On considère la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sin x - 2x.$$

(a) (1 point) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $I = [0, 2\pi[$.
(b) (1 point) Montrer que $f \colon I \to f(I)$ est bijective et préciser $f(I)$.
On considère la bijection réciproque $f^{-1} \colon f(I) \to I$.
(c) (1 point) Calculer $f(\pi)$ et $f^{-1}(-2\pi)$.
(d) (1 point) Calculer $(f^{-1})'(-2\pi)$.

Solution :

(a) La fonction f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I} =]0, 2\pi[$, et on a :

$$f'(x) = \cos x - 2 \leqslant 1 - 2 = -1 < 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur I.

Remarque : La décroissance de f n'a rien à voir avec l'inégalité $f(x) \leqslant x$.

(b) La fonction $f : I \to f(I)$ est strictement décroissante, donc elle est injective. Elle est également surjective par définition de $f(I)$. Elle est donc bijective.

Comme f est continue sur I, son image $f(I)$ est un intervalle. Calculons ses bornes :

$$f(0) = \sin(0) - 2 \cdot 0 = 0, \quad \lim_{x \to 2\pi} f(x) = \sin(2\pi) - 2 \cdot 2\pi = -4\pi.$$

Donc $f(I) =]-4\pi, 0]$.

(c) On a :

$$f(\pi) = \sin(\pi) - 2\pi = -2\pi,$$

donc $f^{-1}(-2\pi) = \pi$.

(d) On a :

$$(f^{-1})'(-2\pi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-2\pi))} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\cos(\pi) - 2} = -\frac{1}{3}.$$