2024-2025
Licence 1 MIPI
Analyse 2

Examen (session 2)

le 25 juin 2025

Durée : 2h

Chaque réponse doit être justifiée

Les calculatrices et les documents sont interdits

Exercice 1. (7 points) Questions de cours

(a) (1 point) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

(b) (2 points) (**Preuve du cours**) Démontrer que toute suite convergente est bornée.

(c) (1 point) Donner un exemple d'une suite décroissante qui ne converge pas, avec une justification rapide †.

(d) (1 point) Énoncer le théorème des accroissements finis.

(e) (2 points) (**Preuve du cours**) Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Démontrer que si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$, alors f est croissante sur I.

Exercice 2. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n}.$$

(a) (1 point) Calculer * la limite de la suite (u_{6n}).

(b) (1 point) Calculer * la limite de la suite (u_{6n+1}).

(c) (1 point) Calculer * la limite de la suite (u_{3n}).

Exercice 3. (2 points)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(n) + 2 + u_n.$$

(a) (1 point) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(b) (1 point) Calculer * la limite de la suite (u_n).

Tournez la page, s'il vous plaît

†. Il peut arriver que vous ayez choisi un exemple trop compliqué pour permettre une justification rapide. Dans ce cas, il faut fournir une justification complète ou chercher un exemple plus simple.

∗. On ne sait pas a priori si la limite existe. Chaque fois qu'on pose la question « Calculer la limite », il est demandé soit de donner la valeur de la limite et de justifier que cette valeur est correcte, soit de démontrer que la limite n'existe pas.

Exercice 4. (6 points)

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) (1 point) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) (1 point) Étudier la continuité de f en 0.

(c) (1 point) Étudier la dérivabilité de f en 0.

(d) (1 point) Préciser le domaine de définition de la fonction dérivée f', puis donner une expression explicite de f' sur ce domaine.

(e) (1 point) Étudier la dérivabilité de f' en 0.

(f) (1 point) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ a au moins une solution.

Exercice 5. (4 points)

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sin x - 2x.$$

(a) (1 point) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $I = [0, 2\pi[$.

(b) (1 point) Montrer que $f\colon I \to f(I)$ est bijective et préciser $f(I)$.
On considère la bijection réciproque $f^{-1}\colon f(I) \to I$.

(c) (1 point) Calculer $f(\pi)$ et $f^{-1}(-2\pi)$.

(d) (1 point) Calculer $(f^{-1})'(-2\pi)$.