2024-2025
Licence 1 MIPI
Analyse 2

Examen (correction)

le 20 mai 2025

Durée : 2h

Chaque réponse doit être justifiée

Les calculatrices et les documents sont interdits

Exercice 1. (7 points) Questions de cours

Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

(a) (1 point) Donner les définitions de "f est continue en a" et "f est dérivable en a".

(b) (2 points) (**Preuve du cours**) Démontrer que si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

(c) (1 point) Donner un exemple d'une fonction qui est continue en a mais non dérivable en a.

(d) (2 points) (**Preuve du cours**) Démontrer que toute suite croissante et majorée converge.

(e) (1 point) Donner un exemple d'une suite réelle qui est bornée mais ne converge pas.

Solution :

(a) Par définition, la fonction f est continue en a si la limite suivante existe : $\lim_{x\to a} f(x)$. (Cette limite est alors automatiquement égale à $f(a)$.)

La fonction f est dérivable en a si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

(On note cette limite $f'(a)$.)

(b) Soit f dérivable en a. Alors, pour tout $x \neq a$, on peut écrire

$$f(x) = f(x)-f(a)+f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a) \quad \xrightarrow[]{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \quad f'(a)(a-a)+f(a) = f(a).$$

(c) Un exemple de fonction continue en a mais non dérivable en a est $f(x) = |x|$ avec $a = 0$. En effet, f est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

(d) Soit (u_n) une suite croissante et majorée. On pose $\ell = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Par la définition de sup, ℓ est un majorant, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq \ell - \varepsilon$. Mais (u_n) est croissante, donc $\forall n \geq N,\ u_n \geq u_N \geq \ell - \varepsilon$.

Donc pour $n\ \geq N$ on a

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$

Cela montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel qu'à partir de ce rang, on a $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

(e) Un exemple de suite réelle bornée mais non convergente est $u_n = (-1)^n$. Cette suite est bornée car $|u_n| \leq 1$ pour tout n, mais elle ne converge pas car la sous-suite (u_{2n}) tend vers 1 et la sous-suite (u_{2n+1}) tend vers -1.

Exercice 2. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sin(n) + 2 \cdot (-1)^n.$$

(a) (1 point) Montrer que la suite (u_n) est bornée.

(b) (1 point) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} \geqslant 1$ et $u_{2n+1} \leqslant -1$.

(c) (1 point) Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n) ? Justifier votre réponse.

Solution :

(a) Comme $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ pour tout n, on en déduit que

$$u_n = \sin(n) + 2 \cdot (-1)^n \leq 1 + 2 = 3, \qquad u_n = \sin(n) + 2 \cdot (-1)^n \geq -1 - 2 = -3.$$

Donc la suite (u_n) est bornée.

(b) On a :

$$u_{2n} = \sin(2n) + 2 \geq -1 + 2 = 1, \quad u_{2n+1} = \sin(2n+1) - 2 \leq 1 - 2 = -1.$$

Donc $u_{2n} \geq 1$ et $u_{2n+1} \leq -1$ pour tout n.

(c) Supposons que la suite (u_n) admette une limite ℓ. Alors, les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) devraient également tendre vers ℓ.

Or, on a montré que $u_{2n} \geq 1$ pour tout n, donc $\ell \geq 1$. De même, $u_{2n+1} \leq -1$ pour tout n, donc $\ell \leq -1$.

C'est absurde. Donc la suite (u_n) n'a pas de limite (et donc elle ne converge pas).

Exercice 3. (3 points)

On définit (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

(a) (1 point) Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) (1 point) Montrer que (u_n) est décroissante.

(c) (1 point) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution :

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

(a) Il suffit de montrer que $u_0 \in [0,1]$ et que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

Il est clair que $u_0 = 1 \in [0,1]$. D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq x \leq 1 + x$, et donc
$$0 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1.$$

(b) Il suffit de montrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$.

Cela revient à $\frac{x}{1+x} \leq x$, ce qui est évident pour $x \in [0,1]$.

(c) La suite est minorée (par (a)) et décroissante (par (b)), donc elle converge vers une limite $\ell \in [0,1]$.

Par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient :
$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell},$$
ce qui implique $\ell = 0$.

Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 4. (9 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x} & \text{si } x > 0, \\ x - 2x^2 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Attention : "e^{x^2}" signifie "$e^{(x^2)}$".

(a) (1 point) Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) (1 point) Étudier la continuité de f en 0.

(c) (1 point) Étudier la dérivabilité de f en 0.

(d) (1 point) (Question auxiliaire) On considère la fonction $g(t) = (2t-1)e^t + 1$. En étudiant cette fonction, démontrer que $g(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

(e) (1 point) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(f) (1 point) En déduire que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(g) (1 point) Donner une expression explicite de $f^{-1}(y)$ pour $y \leqslant 0$.

(h) (1 point) Calculer $f(1)$ et $f^{-1}(e-1)$.

(i) (1 point) Calculer $(f^{-1})'(e-1)$.

Solution :

(a)

Sur $]-\infty, 0[$, $f(x) = x - 2x^2$ est dérivable (et donc aussi continue), étant un polynôme.

Remarque. Cet argument ne permet pas de déduire la continuité ou la dérivabilité sur $]-\infty, 0]$.

Sur $]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ est dérivable (et donc continue), comme composition, soustraction et quotient de fonctions dérivables.

(b) On étudie la continuité en 0. On calcule :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x-2x^2) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x = 1\cdot 0 = 0,$$

et

$$f(0) = 0 - 2\cdot 0^2 = 0.$$

Les trois valeurs sont égales, donc f est continue en 0.

(c) On teste la dérivabilité en 0 à l'aide de la définition :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

On calcule les limites à gauche et à droite :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x-2x^2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1-2x) = 1,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1.$$

Les deux limites sont égales à 1, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

(d) On a :

$$g'(t) = \big[(2t-1)e^t\big]' = (2t-1)'e^t + (2t-1)(e^t)' = 2e^t + (2t-1)e^t = (2t+1)e^t.$$

La fonction g est continue sur $[0,+\infty[$ et $g'(t) > 0$ sur $]0,+\infty[$, ce qui implique que g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Donc pour $t > 0$, on a $g(t) > g(0) = 0$.

(e) On veut montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On calcule $f'(x)$.

— Si $x < 0$, alors $f(x) = x - 2x^2$, donc $f'(x) = 1 - 4x > 0$.

— Si $x > 0$, alors $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$, donc

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2}\cdot x - (e^{x^2}-1)}{x^2} = \frac{(2x^2-1)e^{x^2}+1}{x^2} = \frac{g(x^2)}{x^2} > 0.$$

— On a déjà vu que $f'(0) = 1 > 0$.

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque. La valeur $f'(0)$ n'a pas vraiment d'importance pour conclure à la croissance stricte de f sur $\mathbb{R}$. En revanche, la continuité sur $\mathbb{R}$ (y compris en 0) est essentielle.

Notez également que la « croissance comparée » ne sert à rien pour justifier la croissance ; elle n'est utile que pour calculer des limites.

(f) Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est injective. Donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $f(\mathbb{R})$.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Pour voir ce qu'est $f(\mathbb{R})$, il suffit de calculer les limites aux extrémités :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x - 2x^2) = x^2\left(\frac{1}{x} - 2\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x^2}}{x^2} \cdot x - \frac{1}{x}\right) = +\infty,$$

par la croissance comparée.

Ainsi, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(g)

Pour $y \leq 0$, on cherche la solution x de $f(x) = y$ (cette solution est unique d'après (f)). Cette solution est forcément négative car $f(0) = 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a donc $x - 2x^2 = y$, ce qui revient à résoudre $2x^2 - x + y = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = 1 - 8y$. Comme $y \leq 0$, on a $\Delta \geq 1 > 0$.

Les solutions sont :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8y}}{4}.$$

On choisit la solution négative : $x = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 8y}}{4}$.

On a donc :

$$f^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - 8y}}{4} \quad \text{pour } y \leq 0.$$

(h) On a :

$$f(1) = \frac{e - 1}{1} = e - 1,$$

d'où $f^{-1}(e - 1) = 1$.

(i) On a :

$$(f^{-1})'(e - 1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e - 1))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{g(1^2)/1^2} = \frac{1}{g(1)} = \frac{1}{e + 1}.$$