2024-2025
Licence 1 MIPI
Analyse 2

Examen

le 20 mai 2025
Durée : 2h
Chaque réponse doit être justifiée
Les calculatrices et les documents sont interdits

Exercice 1. (7 points) Questions de cours

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

(a) (1 point) Donner les définitions de "f est continue en a" et "f est dérivable en a".
(b) (2 points) (**Preuve du cours**) Démontrer que si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
(c) (1 point) Donner un exemple d'une fonction qui est continue en a mais non dérivable en a.

(d) (2 points) (**Preuve du cours**) Démontrer que toute suite croissante et majorée converge.
(e) (1 point) Donner un exemple d'une suite réelle qui est bornée mais ne converge pas.

Exercice 2. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sin(n) + 2 \cdot (-1)^n.$$

(a) (1 point) Montrer que la suite (u_n) est bornée.
(b) (1 point) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} \geqslant 1$ et $u_{2n+1} \leqslant -1$.
(c) (1 point) Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n) ? Justifier votre réponse.

Exercice 3. (3 points)

On définit (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

(a) (1 point) Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) (1 point) Montrer que (u_n) est décroissante.
(c) (1 point) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Tournez la page, s'il vous plaît

Exercice 4. (9 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x} & \text{si } x > 0, \\ x - 2x^2 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Attention : "e^{x^2}" signifie "$e^{(x^2)}$".

(a) (1 point) Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) (1 point) Étudier la continuité de f en 0.

(c) (1 point) Étudier la dérivabilité de f en 0.

(d) (1 point) (Question auxiliaire) On considère la fonction $g(t) = (2t-1)e^t + 1$. En étudiant cette fonction, démontrer que $g(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

(e) (1 point) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(f) (1 point) En déduire que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(g) (1 point) Donner une expression explicite de $f^{-1}(y)$ pour $y \leqslant 0$.

(h) (1 point) Calculer $f(1)$ et $f^{-1}(e-1)$.

(i) (1 point) Calculer $(f^{-1})'(e-1)$.