L1S2, Analyse 2, 2023/2024.

Examen, **2h.**

L'utilisation de téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
L'utilisation de documents, à l'exception d'une feuille A4 recto verso, manuscrite et nominative, est interdite.
L'épreuve est notée sur 20, le barème étant indicatif. Elle comprend 5 exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. **Saut mention contraire explicite, toute réponse à une question doit être justifiée.**
Pour toute l'épreuve, les faits suivants pourront être utilisés **sans les justifier** :

F1 : La fonction partie entière $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifie les propriétés suivantes : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x) + 1$, $E(x+1) = E(x) + 1$, $E(x)$ est le maximum de l'ensemble $\{p \in \mathbb{Z}; p \leq x\}$ et, pour $x \geq 0$, $E(x) \in \mathbb{N}$.

F2 : Les fonctions polynômiales et la fonction sinus sont dérivables donc continues. La dérivée de sinus est cosinus.

F3 : Si A et B sont des parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$ alors $\sup A \leq \sup B$.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (1,5 pts).
On considère la suite $a := (4 - 3n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la suite a admet une limite en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

Exercice 2. : (4 pts).
On considère la suite réelle $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := \frac{3n}{2^n - 4^n} .$$

1. Montrer que la suite réelle $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 3^n/n$ est minorée par 1.
2. En déduire que la suite réelle $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 4^n/n$ tend vers $+\infty$.
3. La suite u a-t-elle une limite ? Si oui, préciser laquelle.

Exercice 3. : (3 pts).
Montrer que la suite

$$x = \left(n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

n'a pas de limite.

Exercice 4. : (9,5 pts).
Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x > 0$, $f(x) = (\sin(x))/x$.

1. Étude de f.
   a). Montrer que f est continue.
   b). Justifier le fait que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
   c). Justifier le fait que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   d). Justifier le fait que f admet un prolongement $\hat{f}$ par continuité en 0, prolongement donné par
   $$\begin{array}{rccll} \hat{f} : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & f(x) & \text{si } x \neq 0\,, \\ & & & 1 & \text{si } x = 0\,. \end{array}$$
   Justifier le fait que $\hat{f}$ est continu.
   e). Montrer que $\hat{f}$ est majorée par 1.
   (Indication : on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à une fonction appropriée.)

2. Soit
   $$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x+\hat{f}(x)}{1+x^2}\,. \end{array}$$
   a). Montrer que g est continue.
   b). Montrer que
   $$\forall\, x \in]1; +\infty[\,,\; g(x) \;<\; g(0)\,.$$
   c). On note par g_1 la restriction de g à l'intervalle $[0; 1]$. Montrer que $\sup g \leq \sup g_1$.
   d). En déduire que $\sup g = \sup g_1$.
   e). Montrer qu'il existe $a \in [0; 1]$ tel que $g(a) = \sup g$.

Exercice 5. : (5 pts).
On définit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) = 1$,
$$f(x) \;=\; x(2x+1)\,\sin(1/x)\,, \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(x) \;=\; x^2 + 3x\,, \quad \text{si } x < 0\,.$$

1. Montrer que la fonction f admet une limite épointée en 0.

2. La fonction f est-elle continue en 0 ?

3. Soit $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \neq 0$,
   $$g(x) \;:=\; \frac{f(x)}{|x|}\,.$$
   Montrer que g n'a pas de limite en 0.

Fin de l'épreuve.