L1S2, Analyse 2, 2022/2023.

Examen, **2h.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac. Examen noté sur 20, le barème est indicatif.

L'épreuve comprend 5 exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. **Toute réponse à une question doit être justifiée.**

Pour toute l'épreuve, les faits suivants pourront être utilisés **sans les justifier** :

F1 : La fonction partie entière $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifie les propriétés suivantes : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x) + 1$, $E(x+1) = E(x) + 1$ et $E(x)$ est le maximum de l'ensemble $\{p \in \mathbb{Z};\, p \leq x\}$.

F2 : Les fonctions polynômiales sont dérivables donc continues.

F3 : Si A et B sont des parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$ alors $\sup A \leq \sup B$.

F4 : La fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue et strictement croissante. Elle est nulle en 0, vaut 1 en 1 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour $x > 0$,

$$\left(\sqrt{\cdot}\right)'(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (2 pts).
On considère la suite

$$a \;=\; \left(3 - \frac{2}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}\,.$$

Montrer la convergence de la suite a en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

Exercice 2. : (3 pts).
Pour chacune des suites suivantes, indiquer si sa limite existe et, dans ce cas, la déterminer.

1. $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n \;=\; \frac{3 \,+\, \frac{2}{n}}{1 \,+\, \frac{i}{n^2}} \,.$$
2. $w : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$w_n \;=\; \big(1 \,+\, (-1)^n\big)^n \,.$$

Exercice 3. : (9 pts).
Soit $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$,
$$F(x) \;=\; 1 \,+\, \frac{1}{\sqrt{2 \,+\, x}} \,.$$
Soit $d \in \mathbb{R}^+$. Comme $F(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$, on sait, par le cours, qu'il existe une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $u_0 = d$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$.

1. Vérifier que la fonction $F_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \geq 0$, $F_1(x) = \sqrt{2+x}$, est bien définie, continue et strictement positive.
2. Montrer que F est continue.
3. On suppose que la suite u converge vers un nombre réel ℓ. Vérifier que $\ell \in \mathbb{R}^+$ et que $F(\ell) = \ell$.
4. Soit $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynômiale définie par, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$G(x) \;=\; (x-1)^2 \cdot (2+x) \,.$$
Montrer que l'équation, d'inconnue $x \in]1; +\infty[$, donnée par $G(x) = 1$, a une unique solution notée c.
5. Montrer que l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, donnée par $F(x) = x$, a une unique solution, à savoir c.
6. Montrer la propriété
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \big|u_{n+1} \,-\, c\big| \;\leq\; \frac{1}{2} \cdot \big|u_n \,-\, c\big| \,. \tag{1}$$
7. Montrer la propriété
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \big|u_n \,-\, c\big| \;\leq\; \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \big|d \,-\, c\big| \,. \tag{2}$$
8. La suite u a-t-elle une limite ?

Tournez, svp.

Exercice 4. : (3 pts).
On considère la fonction $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x > 0$,

$$g(x) \;=\; \sqrt{x} \cdot \cos\bigl(1/x\bigr)\,.$$

1. Montrer que la fonction g se prolonge par continuité en 0. En notant par $\hat{g}$ le prolongement par continuité de g en 0, justifier le fait que $\hat{g}(0) = 0$.

2. Montrer que la fonction $\hat{g}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5. : (5 pts).
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f(x) \;=\; \frac{2x^2 \cdot (x^2 \,+\, 9)}{(x^2 \,+\, x \,+\, 1)^2}\,.$$

On rappelle que la borne supérieure $\sup h$ d'une fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, est la borne supérieure de la partie de $\mathbb{R}$ non vide

$$h(\mathcal{D}) \;:=\; \bigl\{h(x)\,;\, x \in \mathcal{D}\bigr\}\,.$$

1. Montrer que f tend vers 2 en $+\infty$.

2. Montrer que $f(1) > 2$.

3. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \in]A; +\infty[$, $f(x) < f(1)$.

4. Soit f_A la restriction $f_{|[0;A]}$ de f à $[0; A]$. Montrer que $\sup f_A \geq \sup f$.

5. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(s) = \sup f$.

Fin de l'épreuve.