L1S2, Analyse 2, 2021/2022.

Examen, 2ième session **1h30.**.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.
Examen noté sur 20, le barème est indicatif.

L'épreuve comprend 5 exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. **Toute réponse à une question doit être justifiée.**

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (2 pts).
Recopier et compléter l'énoncé suivant pour en faire un résultat du cours.
Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction .... Alors, pour tout $(a; b) \in I^2$, pour tout ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ... $f(x) = \ell$.

Exercice 2. : (3 pts).
Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. Donner la définition ou une formulation équivalente de la proposition $(\lim u = +\infty)$.
Montrer que la suite $v = (-2 + 3n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

Exercice 3. : (3 pts).
Soit $w : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ la suite définie par, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right) .$$

Montrer que la suite w n'a pas de limite.

Exercice 4. : (5 pts).
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} + x + x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) , \quad \text{si } x > 0 ,$$

$$\text{et par} \quad f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + x}{2x^3 - 2x^2 + 2x} , \quad \text{si } x < 0 .$$

1. Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en 0. On note par $\hat{f}$ ce prolongement. Vérifier que $\hat{f}(0) = 1/2$.
   Tournez, svp.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 1/2$.
3. Montrer que, pour tout $x < 0$, $f(x) > 1/2$.
(Indication : on pourra simplifier l'expression de f sur $\mathbb{R}^{-*}$ en effectuant la division euclidienne du polynôme $X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1$ par le polynôme $X^2 - X + 1$.)
4. Montrer que 0 est un minimum global de $\hat{f}$. Montrer que $\hat{f}$ n'a pas de minimum global strictement négatif.
5. $\hat{f}$ admet-elle un minimum global strictement positif ?

Exercice 5. : (9 pts).
On rappelle que la fonction $\ln :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est le logarithme népérien, qu'elle est strictement croissante et continue, que $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$, que $e \in]2; 3[$ et qu'elle admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.
Soit $g :] - 1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivable définie par, pour $x > -1$, $g(x) = \ln(1 + x)$.
On considère les suites réelles $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad a_n = s_n - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad b_n = s_n - \ln(n).$$

1. Vérifier que $a_1 > 0$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $c_p \in]p - 1; p[$ tel que
$$\ln(p+1) - \ln(p) = \frac{1}{1 + c_p}. \tag{1}$$
(Indication : on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à g.)
3. En déduire que a est croissante et que b est décroissante.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq b_n$.
5. Montrer que $\lim\limits_{n}(b_n - a_n) = 0$.
6. En déduire que a et b convergent vers la même limite, notée γ, et que $\gamma > 0$.
7. La suite s a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Fin de l'épreuve.