L1S2, Analyse 2, 2021/2022.

Examen, **2h.**.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.
Examen noté sur 20, le barème est indicatif.

L'épreuve comprend 5 exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. **Toute réponse à une question doit être justifiée.**

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (3 pts).
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition ou une formulation équivalente de la proposition $(\ell = \lim u)$. Montrer la convergence de la suite

$$v \;=\; \left(-3 + \frac{5}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

Exercice 2. : (5 pts).
Soit $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction partie entière. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est le maximum de l'ensemble $\{p \in \mathbb{Z};\ p \leq x\}$.
On considère les suites réelles $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n \;=\; \frac{n^3 + 7n + 3}{2n^3 + n^2 + n} \quad \text{et} \quad a_n \;=\; E\Big(-3 + \sin^2(n)\cdot w_n\Big)\,.$$

1. Vérifier que E est constante sur $[-3;-2[$. Donner la valeur de la constante.
2. Montrer que la suite w converge et déterminer sa limite, notée ℓ.
3. En utilisant le fait que $](1/4);(3/4)[$ est un voisinage de ℓ, montrer que la propriété

$$\mathcal{E}(n) \;=\; \Big(-3 \leq -3 + \sin^2(n)\cdot w_n < -2\Big)$$

   est vraie à partir d'un certain rang.
4. En déduire que la suite a est stationnaire, c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang.
5. La suite a a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Tournez, svp.

Exercice 3. : (5 pts).
On considère la suite réelle $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\,.$$

1. Montrer que s est strictement croissante.
2. Justifier que s a une limite.
3. Montrer que, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$,

$$0 \;\le\; s_n \;\le\; 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\,. \tag{1}$$

4. Montrer que s est majorée par 2.
   Indication : on pourra montrer que, pour $k \in [\![2;n]\!]$,

$$\frac{1}{k(k-1)} \;=\; \frac{1}{k-1} \;-\; \frac{1}{k}\,.$$

5. En déduire que $\lim s \in](5/4);2]$.

Exercice 4. : (3 pts).
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \cdot \sin(1/x)$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
2. Le prolongement $\hat{f}$ par continuité de f en 0 est-il dérivable en 0 ?

Exercice 5. : (6 pts).
Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynômiale définie par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) \;=\; x^6 + \frac{x^4}{4} + x^3 + 2x + 1\,.$$

On rappelle que la borne inférieure $\inf P$ de P est la borne inférieure $\inf P(\mathbb{R})$ de l'ensemble non vide

$$P(\mathbb{R}) \;:=\; \big\{P(x)\,;\, x \in \mathbb{R}\big\}\,.$$

1. Déterminer explicitement P', la dérivée de P.
2. Montrer que les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$ existent et valent $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe $(a_-;a_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_- < 0 < a_+$ et tel que

$$\forall x \in \big(]-\infty;a_-[\,\cup\,]a_+;+\infty[\big)\,,\quad P(x) \;>\; P(0)\,.$$

4. Montrer que la borne inférieure $\inf P$ de P est atteinte, c'est-à-dire que $P(\mathbb{R})$ admet un minimum ou encore qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = \inf P$.
5. Montrer que P n'admet pas de minimum positif.

Fin de l'épreuve.

Barème :

Exercice 1 : 1+2 pts.

Exercice 2 : 5 pts.

1. 1 pt.
2. 1 pt.
3. 1,5 pts.
4. 0,5 pt.
5. 1 pt.

Exercice 3 : 5 pts.

1. 0,5 pt.
2. 1 pt.
3. 1 pt.
4. 1,5 pts.
5. 1 pt.

Exercice 4 : 3 pts.

1. 1 pt.
2. 2 pts.

Exercice 5 : 6 pts.

1. 0,5 pt.
2. 1 pt.
3. 1,5 pts.
4. 2 pts.
5. 1 pt.

Corrigé.

Exercice 1 : 3 pts.
La proposition ($\ell = \lim u$) est équivalente à

$$\forall \epsilon > 0 \, , \exists N \in \mathbb{N} \, , \forall n \in \mathbb{N}^* \, , \big(n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon\big) \, .$$

1 pt.
On montre que la suite v tend vers -3, c'est-à-dire la proposition :

$$\forall \epsilon > 0 \, , \exists N \in \mathbb{N} \, , \forall n \in \mathbb{N}^* \, , \big(n \geq N \implies |v_n - (-3)| < \epsilon\big) \, .$$

Soit $\epsilon > 0$. On pose $N = E(5/\epsilon) + 1$, où E désigne la fonction partie entière. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$. On a $n \geq N > 5/\epsilon$ donc, comme $n > 0$ et $\epsilon > 0$, on a $\epsilon > 5/n$. On a donc

$$|v_n - (-3)| \ = \ \left|\frac{5}{n}\right| \ = \ \frac{5}{n} \ < \ \epsilon \, .$$

2 pts.

Exercice 2 : 5 pts.

1. Soit $x \in [-3; -2[$. Le maximum de l'ensemble $\{p \in \mathbb{Z}; p \leq x\}$ est strictement inférieur à -2, car x l'est, et est supérieur ou égale à -3, car -3 est un entier qui minore x. Ce maximum, qui est un entier, est donc -3. E est donc constante égale à -3 sur l'intervalle $[-3; -2[$. **1 pt.**
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$w_n \ = \ \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{1 + 7/n^2 + 3/n^3}{2 + 1/n + 1/n^2} \ = \ \frac{1 + 7/n^2 + 3/n^3}{2 + 1/n + 1/n^2} \, .$$

   Par le cours, $\lim(1/n) = 0$ donc, par les opérations sur les limites de suite, le numérateur de la fraction précédente tend 1 tandis que le dénominateur tend vers $2 \neq 0$. Donc, par produit et passage à l'inverse, w tend vers $1/2 = \ell$. **1 pt.**
3. L'intervalle $I :=](1/4); (3/4)[$ est bien un voisinage de $\ell = 1/2$ donc, par le 2, il contient tous les termes de la suite w à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, on a donc $(1/4) \leq w_n \leq (3/4)$ et, comme $0 \leq \sin^2(n) \leq 1$, on a $0 \leq \sin^2(n) \cdot w_n \leq (3/4)$. En particulier, on a $-3 \leq -3 + \sin^2(n) \cdot w_n \leq -3 + (3/4) < -2$. On a montré que $\mathcal{E}(n)$ est vraie à partir du rang n_0. **1,5 pts.**
4. Pour $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, on a, d'après 3, $-3 + \sin^2(n) \cdot w_n \in [-3; -2[$, donc, d'après 1, $a_n = E(-3 + \sin^2(n) \cdot w_n) = -3$. La suite a est donc constante égale à -3 à partir du rang n_0. **0,5 pt.**
5. D'après 4 et le cours, la suite a converge vers -3. **1 pt.**

Exercice 3 : 5 pts.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par définition des sommes finies,

$$s_{n+1} \ - \ s_n \ = \ \frac{1}{(n+1)^2} \ > \ 0$$

   et $s_{n+1} > s_n$. Par le cours, la suite s est strictement croissante. **0,5 pt.**

2. D'après 1, la suite s est croissante donc, par le cours, s a une limite. **1 pt.**
3. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Pour $k \in [\![2;n]\!]$, on a $k \geq k-1 > 0$ donc $k^2 \geq k(k-1)$ et

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} .$$

Par le cours, on en déduit que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} .$$

De plus, comme s est croissante, $s_n \geq s_1 = 1 \geq 0$. **1 pt.**
4. On note que $s_1 = 1 \leq 2$. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Pour $k \in [\![2;n]\!]$, on a

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

donc, en utilisant les propriétés du cours sur les sommes finies,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} \right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell} \right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + 1 + \left(\sum_{\ell=2}^{n-1} \frac{1}{\ell} \right) - \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n} . \end{aligned}$$

Donc, par 3, $0 \leq s_n \leq 2 - (1/n) \leq 2$. La suite s est donc majorée par 2. **1,5 pts.**
5. Pour $n \in [\![3;+\infty[\![$, on a, d'après 1 et 4, $(5/4) = s_2 < s_3 \leq s_n \leq 2$. D'après 2, on peut passer à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités. On obtient $(5/4) = s_2 < s_3 \leq \lim s \leq 2$. **1 pt.**

Exercice 4 : 3 pts.

1. Comme la fonction sinus est minoré par -1 et majorée par 1, on a, pour $x \neq 0$,

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

donc, comme $x^2 \geq 0$, on a

$$-x^2 \leq x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 .$$

Par le cours, $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 = \lim\limits_{x\to 0}(-x^2)$. En particulier, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x^2 = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}(-x^2)$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe et vaut $0 \in \mathbb{R}$. Donc f se prolonge par continuité en 0. **1 pt**.

2. On étudie la limite, quand $x \to 0$, $x \neq 0$, de la quantité

$$\frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(0)}{x - 0} = \frac{\hat{f}(x) - 0}{x - 0} = \frac{\hat{f}(x)}{x} = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) .$$

Comme la valeur absolue de sinus est majorée par 1, on a, pour $x \neq 0$,

$$0 \leq \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| .$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, par le cours. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} |x| = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$$

existe et vaut 0. Par le cours,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(0)}{x - 0}$$

existe et vaut 0. La fonction $\hat{f}$ est donc dérivable en 0 de dérivée 0. **2 pts**.

Exercice 5 : 6 pts.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $P'(x) = 6x^5 + x^3 + 3x^2 + 2$. **0,5 pt.**
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$P(x) = x^6 \cdot \left(1 + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right) . \tag{2}$$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$, on a, par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} x^6 = +\infty$, et, par inversion et produit,

$$0 = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{4x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x^5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^6} .$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right) = 1 \neq 0$$

donc, par produit, $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$, on peut suivre les arguments précédents pour obtenir que $\lim\limits_{-\infty} P$ existe et vaut $+\infty$. **1 pt.**

3. Comme $]P(0);+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$, il existe un réel b_+ tel que, pour tout $x > b_+$, $P(x) \in]P(0);+\infty[$. On pose $a_+ = |b_+| + 1 > 0$. Pour $x > a_+$, on a $x > |b_+| \geq b_+$ donc $P(x) \in]P(0);+\infty[$ soit $P(x) > P(0)$.
   Comme $]P(0);+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} P = +\infty$, il existe un réel b_- tel que, pour tout $x < b_-$, $P(x) \in]P(0);+\infty[$. On pose $a_- = -|b_-| - 1 < 0$. Pour $x < a_-$, on a $x < -|b_-| \leq b_-$ donc $P(x) \in]P(0);+\infty[$ soit $P(x) > P(0)$. **1,5 pts.**
4. Soit P_0 la restriction de P à $[a_-;a_+]$. Comme P est continue, P_0 l'est aussi donc, il existe, d'après le cours (Th. de Heine), un $x_0 \in [a_-;a_+]$ tel que $P_0(x_0) = \inf P_0$. Il suffit de montrer que $\inf P = \inf P_0$, car $P(x_0) = P_0(x_0)$. Comme

$$\left\{P_0(x)\,;\ x \in [a_-;a_+]\right\} \ = \ \left\{P(x)\,;\ x \in [a_-;a_+]\right\} \ \subset \ \left\{P(x)\,;\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

   on a $\inf P \leq \inf P_0$, par le cours.
   D'après 3, on sait que $0 \in [a_-;a_+]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in [a_-;a_+]$, $P(x) = P_0(x) \geq \inf P_0$. Si $x > a_+$, on a, par 3, $P(x) > P(0) = P_0(0) \geq \inf P_0$. Si $x < a_-$, on a, par 3, $P(x) > P(0) = P_0(0) \geq \inf P_0$. Donc $\inf P_0$ minore l'ensemble

$$\left\{P(x)\,;\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

   donc, par définition de sa borne inférieure, $\inf P \geq \inf P_0$. On a montré que $\inf P = \inf P_0 = P(x_0)$. **2 pts.**
5. Soit x_1 un minimum de P. Comme P est dérivable, on sait, par le cours, que $P'(x_1) = 0$. Or, pour $x \geq 0$, on a, d'après 1, $P'(x) = 6x^5 + x^3 + 3x^2 + 2 \geq 2 > 0$. Donc x_1 ne peut être positif. P n'admet donc pas de minimum positif. **1 pt.**