2020-2021
Licence 1 MIPI
Analyse 2

Examen (correction)

le 21 mai 2021

Durée : 2h

Exercice 1. (7 points) Questions du cours

(1 pt) $a)$ **Formuler le théorème de Rolle.**

(1 pt) $b)$ **Formuler le théorèmes des accroissements finis.**

(2 pt) $c)$ **(Preuve du cours)**

Démontrer le théorème des accroissements finis (vous avez droit d'utiliser le théorème de Rolle).

(1 pt) $d)$ **(Application)**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **une fonction dérivable telle que** $f(1) = 7$ **et** $f(5) = 19$.

Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ **tel que** $f'(c) = 3$.

(2 pt) $e)$ **(Preuve du cours)**

Soit (u_n) **une suite convergente. Démontrer qu'elle est bornée.**

$d)$ La fonction f est continue sur $[1,5]$ et dérivable sur $]1,5[$. Donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis. D'après le théorème, il existe $c \in]1,5[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{19 - 7}{4} = 3.$$

Exercice 2. (3 points)

(1 pt) $a)$ **Calculer**

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{n+5}.$$

(1 pt) $b)$ **Soit** $\ell \in \mathbb{R}$. **Donner la définition de**

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

La définition doit commencer par "$\forall \varepsilon > 0$**".**

(1 pt) $c)$ **Redémontrer le resultat de** $a)$ **<u>par définition</u>.**

$a)$ On a

$$\frac{2n}{n+5} = \frac{2}{1 + 5/n} \to \frac{2}{1+0} = 2.$$

$b)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

$c)$ On pose $u_n = \frac{2n}{n+5}$. Soit $\varepsilon > 0$. On doit démontrer que l'inégalité

$$|u_n - 2| < \varepsilon \qquad (*)$$

est vraie à partir d'un rang.

On a
$$|u_n - 2| = |\frac{2n}{n+5} - 2| = |\frac{-10}{n+5}| = \frac{10}{n+5}.$$
On a donc
$$|u_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{10}{n+5} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{n+5}{10} > \tfrac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \tfrac{10}{\varepsilon} - 5.$$
On veut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que l'inégalité $(*)$ est vraie pour tout $n \geqslant N$. Si $\frac{10}{\varepsilon} - 5 < 0$, on peut prendre $N = 0$. Sinon, on prend $N = [\frac{10}{\varepsilon} - 5] + 1$. Ici $[\bullet]$ est la partie entière.

Exercice 3. (4 points)

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $u_0 = 3$.

(1 pt) $a)$ **Démontrer $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) \geqslant x$.**

(1 pt) $b)$ **Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.**

(0,5 pt) $c)$ **Démontrer que la suite (u_n) est croissante.**

(1 pt) $d)$ **Démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.**

Indication : raisonnement par l'absurde.

(0,5 pt) $e)$ **En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.**

On a
$$f(x) \geqslant x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 2 \geqslant x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 \geqslant 0.$$
Les racines du polynôme $x^2 - 3x + 2$ sont 1 et 2. Donc on a $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$ pour $x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$. En particulier on a $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [2, +\infty[$.

Remarque. Il est inutile de faire le tableau de variations de f pour répondre à la question a). En revanche, on peut faire le tableau de variations de $f(x) - x$.

Il est aussi inutile d'utiliser la suite (u_n) pour répondre à la question a). Cette question concerne seulement la fonction f, mais pas la suite (u_n).

b) On veut vérifier que chaque terme u_n de la suite est dans l'intervalle $[2, +\infty[$. Pour cela il suffit de vérifier

- $u_0 \in [2, +\infty[$,
- $f([2, +\infty[) \subset [2, +\infty[$.

On a clairement $u_0 = 3 \in [2, +\infty[$. Vérifions la deuxième condition. Pour $x \in [2, +\infty[$ on a $f(x) \geqslant x \geqslant 2$ d'après a), donc $f(x) \in [2, +\infty[$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [2, +\infty[$ par b) et donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$ par a).

d) Supposons que (u_n) est majorée. Alors la suite (u_n) converge parce qu'elle est majorée et croissante. Soit ℓ la limite de (u_n). On a donc $f(\ell) = \ell$. On a
$$f(\ell) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - 2\ell + 2 = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - 3\ell + 2 = 0.$$
Les racine du polynôme $\ell^2 - 3\ell + 2$ sont $\ell = 1$ et $\ell = 2$. C'est absurde parce que si la suite (u_n) est croissante et $u_0 = 3$ alors (u_n) ne peut pas tendre vers 1 ou 2.

e) La suite (u_n) est croissante et elle n'est pas majorée. Alors par le théorème du cours, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque. La limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ n'a rien à voir avec la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 4 (3 points) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3\sin(1/x)$.

(1 pt) $a)$ **Justifier que f est prolongeable par continuité en $x = 0$.**

Soit $\bar{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le prolongement de f.

(1 pt) $b)$ **Justifier que $\bar{f}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $\bar{f}'$.**

(1 pt) $c)$ **Justifier que $\bar{f}$ est dérivable en $x = 0$ et calculer $\bar{f}'(0)$.**

$a)$ x^3 tend vers 0 quand x tend vers 0 et $\sin(1/x)$ est bornée. Cela implique

$$\lim_{x\to 0} x^3\sin(1/x) = 0.$$

Donc f est prolongeable par continuité en $x = 0$, le prolongement est

$$\bar{f} = \begin{cases} x^3\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$b)$ $\sin(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme la composition de deux fonctions dérivables ($1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$). Puis, $f(x) = x^3\sin(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Cela implique que $\bar{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \neq 0$, on a

$$\bar{f}'(x) = f'(x) = \left(x^3\sin(1/x)\right)' = 3x^2\sin(1/x) + x^3\cos(1/x)(-1/x^2) = 3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x).$$

$c)$ On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2\sin(1/x) = 0.$$

La dernière égalité est vraie parce que x^2 tend vers 0 et $\sin(1/x)$ est bornée.

Cela implique que $\bar{f}$ est dérivable en $x = 0$ et $\bar{f}'(0) = 0$.

Remarque. Il ne faut pas confondre $\bar{f}'(0)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \bar{f}'(x)$.

Exercice 5 (5,5 points) Les deux parties sont indépendantes

Partie 1. On considère la fonction $f\colon [2, 4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

(0,5 pt) $a)$ **Montrer que f est dérivable et calculer f'.**

(0,5 pt) $b)$ **Montrer que f est bijective de $[2, 4]$ dans $f([2, 4])$.**

(0,5 pt) $c)$ **Préciser $f([2, 4])$.**

(1 pt) $d)$ **Écrire la formule de f^{-1}.**

Partie 2. On considère la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x + \sin(x)$.

(0,5 pt) $e)$ **Montrer que g est dérivable calculer g'.**

(1 pt) $f)$ **Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.**

(0,5 pt) $g)$ **Calculer $g(2\pi)$.**

(0,5 pt) $h)$ **Calculer $g^{-1}(4\pi)$.**

(0,5 pt) $i)$ **Calculer $(g^{-1})'(4\pi)$.**

a) Les fonctions 1 et $x+3$ sont dérivables sur $[2,4]$ et $x+3$ ne s'annule pas sur $[2,4]$. Donc $f(x)$ est bien une fonction dérivable sur $[2,4]$. On a $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$.

b) On voit dans a) que $f' < 0$. Cela implique que f est strictement décroissante. Cela implique qu'elle est injective, donc elle est bijective sur son image.

c) La fonction f est continue est strictement décroissante sur $[2,4]$. Cela implique

$$f([2,4]) = [f(4), f(2)] = \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right].$$

d) On a une bijection $f\colon [2,4] \to \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right]$. Donc la bijection inverse est de la forme

$$f^{-1}\colon \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right] \to [2,4].$$

On a

$$\frac{1}{x+3} = y \quad \Leftrightarrow \quad x+3 = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{y} - 3.$$

Donc $f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 3$.

e) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme des 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = 2 + \cos(x)$.

f) On a $g'(x) = 2 + \cos(x) \geqslant 2 - 1 > 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cela implique qu'elle est injective, donc elle est bijective sur son image. Il reste a vérifier $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

La fonction g est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc pour déterminer $g(\mathbb{R}) = g(]-\infty, +\infty[)$, il faut calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

On a $g(x) \geqslant 2x - 1$ et $\lim_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$. Alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

On a $g(x) \leqslant 2x + 1$ et $\lim_{x\to-\infty} 2x + 1 = -\infty$. Alors $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Cela implique $g(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$. Donc $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

g) $g(2\pi) = 4\pi + \sin(2\pi) = 4\pi$.

h) $g(2\pi) = 4\pi$ implique $g^{-1}(4\pi) = 2\pi$.

i)

$$(g^{-1})'(4\pi) = \frac{1}{g'(g^{-1}(4\pi))} = \frac{1}{g'(2\pi)} = \frac{1}{2+\cos(2\pi)} = \frac{1}{3}.$$