2020-2021
Licence 1 MIPI
Analyse 2

Examen

le 21 mai 2021

Durée : 2h

2 pages

Chaque réponse doit être justifiée.

Exercice 1. (7 points) Questions du cours

(1 pt) *a*) Formuler le théorème de Rolle.

(1 pt) *b*) Formuler le théorèmes des accroissements finis.

(2 pt) *c*) **(Preuve du cours)**

Démontrer le théorème des accroissements finis (vous avez droit d'utiliser le théorème de Rolle).

(1 pt) *d*) **(Application)**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(1) = 7$ et $f(5) = 19$.

Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 3$.

(2 pt) *e*) **(Preuve du cours)**

Soit (u_n) une suite convergente. Démontrer qu'elle est bornée.

Exercice 2. (3 points)

(1 pt) *a*) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+5}.$$

(1 pt) *b*) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

La définition doit commencer par "$\forall\varepsilon > 0$".

(1 pt) *c*) Redémontrer le resultat de *a*) **par définition**.

Exercice 3. (4 points)

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $u_0 = 3$.

(1 pt) *a*) Démontrer $\forall x \in [2, +\infty[,\ f(x) \geqslant x$.

(1 pt) *b*) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2$.

(0,5 pt) *c*) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

(1 pt) *d*) Démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

Indication : raisonnement par l'absurde.

(0,5 pt) *e*) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Tournez la page, s'il vous plaît

Exercice 4 (3 points) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 \sin(1/x)$.

(1 pt) a) Justifier que f est prolongeable par continuité en $x = 0$.

Soit $\bar{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le prolongement de f.

(1 pt) b) Justifier que $\bar{f}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $\bar{f}'$.

(1 pt) c) Justifier que $\bar{f}$ est dérivable en $x = 0$ et calculer $\bar{f}'(0)$.

Exercice 5 (5,5 points) Les deux parties sont indépendantes

Partie 1. On considère la fonction $f\colon [2, 4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

(0,5 pt) a) Montrer que f est dérivable et calculer f'.

(0,5 pt) b) Montrer que f est bijective de $[2, 4]$ dans $f([2, 4])$.

(0,5 pt) c) Préciser $f([2, 4])$.

(1 pt) d) Écrire la formule de f^{-1}.

Partie 2. On considère la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x + \sin(x)$.

(0,5 pt) e) Montrer que g est dérivable calculer g'.

(1 pt) f) Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(0,5 pt) g) Calculer $g(2\pi)$.

(0,5 pt) h) Calculer $g^{-1}(4\pi)$.

(0,5 pt) i) Calculer $(g^{-1})'(4\pi)$.