CORRIGÉ de l'Examen d'Algèbre Linéaire 2

EXERCICE 1 :

1. Une base "canonique" de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ donc $\dim \mathbb{R}_n[X] = \operatorname{card}\mathcal{B} = n+1$.

2.a) On peut vérifier la stabilité de V_2 par rapport aux deux opérations vectorielles ;
Ou bien, on pourrait argumenter ainsi : $\mathbb{R}_2[X]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^3$ par $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \overset{\phi}{\mapsto} (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ donc via ϕ, on a : $\phi(V_2) = \left\{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\right\}$ qui est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.a) On procède comme d'habitude : $\alpha(X-1) + \beta\left(X^2 - 1\right) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 0$. Or, ceci est vrai car le membre de gauche équivaut (vu que $\mathcal{B} = \left\{1, X, X^2\right\}$ est libre) à $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

2.c) Par (2.a) $\dim V_2 = \dim \phi(V_2) = 2$. D'autre part, $a_0 + a_1 + a_2 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -a_1 - a_2$ donc tout élément $P \in V_2$ s'écrit $P = a_1(X-1) + a_2\left(X^2 - 1\right)$ donc $\mathcal{S}$ engendre V_2 et par (2.b) est libre donc base de V_2.

2.d) Notons $E_1 = 1; E_2 = X - 1; E_3 = X^2 - 1$. Vus comme vecteurs dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(1; X; X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ on a : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ donc leur coordonnées se présentent sons une forme échelonnée de donc la famille $\widetilde{\mathcal{B}} = (E_1; E_2; E_3)$ est libre et comme $\widetilde{\mathcal{B}} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ elle est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.e) Il suffit de remarquer que $F = \operatorname{Vect}\{E_1\}$ et comme on a vu que $\mathcal{S} = \{E_2, E_3\}$ est base de V_2 la somme $F + V_2$ est directe ssi $\{E_1\} \cup \mathcal{S} = \widetilde{\mathcal{B}}$ est libre, ce qui a été prouvé a (2.d). De surcroit, $F + V_2 = \mathbb{R}_2[X]$ car $\widetilde{\mathcal{B}}$, base de $F + V_2$ est aussi base dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2.f) Par sa définition, on a $P_{\mathcal{B}\widetilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comme c'est une matrice triangulaire supérieur on a $\det P_{\mathcal{B}\widetilde{\mathcal{B}}} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ ce qui re-confirme que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est bien base. Son inverse se calcule en composant l'équation matricielle : $AX = Y$ qui équivaut au système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & -x_3 & = & y_1 \\ & x_2 & & = & y_2 \\ & & x_3 & = & y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclll} x_1 & = & y_1 & +y_2 & +y_3 \\ x_2 & = & & y_2 & \\ x_3 & = & & & y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{P^{-1}_{\mathcal{B}\widetilde{\mathcal{B}}}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 :

1. Si $a \neq 0$, $\deg P = 4$. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $\deg P = 3$. Si $(a,b) = (0,0)$, $\deg P = 0$.

2. $P'(x) = 4aX^3 + 3bX^2$. Donc 1 est racine au moins double ssi $P(1) = 0 = P'(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b + 1 = 0 \\ 4a + 3b = 0 \end{array}\right.$.

On peut facilement résoudre le système par pivot de Gauss, ou bien par la méthode de Cramer. En effet, on a :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \implies a = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = 3 \text{ et } b = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -4$$

Ainsi, les formules de Cramer fournissent la solution unique $(a,b) = (3,-4)$.

3. Pour les valeurs de a et b ci-dessus on a $P(X) = 3X^4 - 4X^3 + 1$ qu'on pourrait diviser par $(X-1)^2$ pour obtenir le quotient Q qui est de degré 2, ou bien on peut le "travailler" par des identités remarquables ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) &= 3X^4 - 4X^3 + 1 = 3X^3(X-1) - \left(X^3 - 1\right) = (X-1)\left(3X^3 - X^2 - X - 1\right) \\ &= (X-1)\left(X^2(X-1) + X\left(X^2-1\right) + X^3 - 1\right) = (X-1)^2\left(X^2 + X(X+1) + X^2 + X + 1\right) \\ &= (X-1)^2\left(3X^2 + 2X + 1\right) \equiv (X-1)^2 \cdot Q(X) \end{aligned}$$

Donc on voit à nouveau que $(X-1)^2 \mid P(X)$ et on veut trouver les racines de $Q(X) = 3X^2 + 2X + 1$. Or, son discriminant $\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 1 < 0$, donc les racines de Q sont purement complexes donc il est irréductible sur $\mathbb{R}$ et donc la factorisation obtenue ci-dessus est bien la décomposition de P sur $\mathbb{R}$ en facteurs irréductibles.

4. P étant à coefficients *réels*, s'il admettait une racine triple α purement complexe, il admettrait sa conjuguée complexe $\overline{\alpha} \neq \alpha$ comme racine aussi, avec $\overline{\alpha}$ ayant la même multiplicité que α, ce qui serait impossible car alors on aurait $(X-\alpha)^3(X-\overline{\alpha})^3 \mid P(X)$ donc $\deg P \geq 6 > 4$.

EXERCICE 3 :

En soustrayant des lignes comme suit : de L_1 la L_2 et de L_2 la L_3 on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-x & x-1 \\ 1-x & x-1 & 0 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (x-1)^2(x+2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(x-1)^2(x+2)$$

Donc 1 est la racine double et -2 est l'autre racine, simple.
Observation : alternativement, on aurait pu développer le déterminant, obtenir un polynôme de deg $=3$ en X, puis procéder comme à l'exercice précédent en utilisant l'information qu'on a une racine double.

EXERCICE 4 :

1. Sur $I =]-1,\infty[$ tant $t \mapsto \ln(1+t)$ que $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sont bien définis, donc on peut diviser $(\star)$ par $1+t$ pour obtenir une équation équivalente, à savoir (E).

2. "La" solution générique de $y' + ay = 0$ est $y_0 = \lambda \mathrm{e}^{-A}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ avec A primitive de $I \ni t \mapsto a(t) = \dfrac{1}{1+t}$.
On a alors : $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \Big[\ln|1+t|\Big]_{t_0}^{t} = \ln(1+t)$ où pour la dernière égalité on a fait le choix $t_0 = 0 \in I$ et tenu compte que sur $t \in I \Leftrightarrow 1+t > 0$. Donc on obtient l'expression de la solution générique de (E_0) sur I :

$$I \ni t \mapsto y_0(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\ln(1+t)} = \lambda \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{1+t}\right)} = \frac{\lambda}{1+t}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, l'espace vectoriel 1-dimensionnel des solutions de (E_0) sur I est : $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left\{ I \ni t \mapsto \dfrac{1}{1+t} \in \mathbb{R} \right\}$.

3. On applique la méthode de la "variation de la constante" : on propose comme solution particulière de (E) la fonction $y_p = \lambda y_0$ où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est fonction dérivable inconnue et y_0 est une solution (particulière) de (E_0). Alors, en remplacant y_p en (E) on obtient (compte tenu que y_0 est à valeurs strictement positives sur I) :

$$\lambda' y_0 + \lambda \underbrace{\left(y_0' + \frac{1}{1+t} y_0\right)}_{=0 \text{ par l'hyp. sur } y_0} = \frac{1+\ln(1+t)}{1+t} \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1+\ln(1+t)}{1+t} = (1+t)\frac{1+\ln(1+t)}{1+t} = 1+\ln(1+t).$$

Ainsi, on a trouvé une équation différentielle simple en inconnue λ qu'on intègre directement :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \int_{t_0}^{t} 1\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = (t-t_0) + \int_{t_0}^{t} (1+t)' \ln(1+t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{IPP}}{=} (t-t_0) + \Big[(1+t)\ln(1+t)\Big]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} (1+t) \cdot \frac{(1+t)'}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= (t-t_0) + [(1+t)\ln(1+t)]_{t_0}^{t} - (t-t_0) = [(1+t)\ln(1+t)]_{t_0}^{t} \end{aligned}$$

Enfin, avec le choix : $t_0 = 0$ on obtient $\lambda(t) = (1+t)\ln(1+t)$. On en déduit une solution particulière de (E) :

$$y_p(t) = \lambda(t) y_0(t) = (1+t)\ln(1+t) \cdot \frac{1}{1+t} = \ln(1+t).$$

4. "La" solution générique sur I de (E) (et donc, cf. (1), de $(\star)$) est du type $y = y_0 + y_p$ où y_0 solution générique de (E_0) et y_p (trouvé ci-dessus), et par conséquent, elle est :

$$I \ni t \mapsto y(t) = \frac{\lambda}{1+t} + \ln(1+t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, l'espace affine 1-dimensionnel des solutions de (E) sur I est : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{I \ni t \mapsto \ln(1+t) \in \mathbb{R}\}$.