Université de Cergy-Pontoise - L1 Examen du 27 juin 2025 - **2$^{\text{ème}}$ session**

# Examen d'Algèbre Linéaire 2

## Durée : 1h30

*Les documents, les smartphones, les tablettes, les smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés*

*Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction.* ***Toute réponse sans justification vaut zéro***

**Exercice 1 :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid d^\circ P \leq n\}$. Notons $\mathcal{B}$ sa base canonique.

**1.** Préciser la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ en donnant aussi une base.

**2.** Soit $n = 2$ et $V_2 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \text{ avec } a_0 + a_1 + a_2 = 0\right\}$.

**2.a)** Montrer que $V_2$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

**2.b)** Montrer que $\mathcal{S} = (X-1; X^2-1)$ est une famille libre.

**2.c)** $\mathcal{S}$ est-elle une base de $V_2$ ? (justifier !)

**2.d)** Soit la famille $\widetilde{\mathcal{B}} = (1; X-1; X^2-1)$. Montrer qu'elle est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

**2.e)** Si $F = \mathbb{R}_0[X]$ (espace vectoriel des polynômes constants), justifier : $F \oplus V_2 = \mathbb{R}_2[X]$.

**2.f)** Donner $P_{\mathcal{B}\widetilde{\mathcal{B}}}$, matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$. Calculer son déterminant et l'inverse $P^{-1}_{\mathcal{B}\widetilde{\mathcal{B}}}$.

**Exercice 2 :** Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ , on considère le polynôme $P(X) = aX^4 + bX^3 + 1$.

**1.** Discuter le degré de $P(X)$ suivant les valeurs de $a$ et de $b$.

**2.** Montrer que 1 est racine au moins double de $P(X)$ si (S) : $\begin{cases} a+b & = & -1 \\ 4a+3b & = & 0 \end{cases}$.

**3.** Pour les valeurs de $a$ et de $b$ trouvées au (2), diviser $P(X)$ par $(X-1)^2$ et en déduire la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.

**4.** Justifier pourquoi $P(X)$ ne peut admettre de racine *triple* purement complexe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pour aucun couple $(a,b) \in \mathbb{R}$.
(Indication : on pourrait raisonner par l'absurde. $P(X)$ a des coefficients *réels*)

**Exercice 3 :** Résoudre : $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ d'inconnue $x$, sachant qu'elle a une racine double.
(Indication : alternativement, on pourrait faire des "opérations élémentaires" sur ses lignes ou/et les colonnes du déterminant afin d'obtenir directement une expression factorisée)

**Exercice 4 :** On se propose de résoudre sur $I = ]-1, \infty[$ l'équation différentielle linéaire :

$$(1+t)y' + y = 1 + \ln(1+t) \qquad (\star)$$

**1)** Justifier pourquoi $(\star)$ équivaut sur $I$ à :

$$y' + \frac{1}{1+t}y = \frac{1+\ln(1+t)}{(1+t)} \qquad \text{(E)}$$

**2)** Trouver l'expression générique d'une solution $y_0$ de l'équation sans second membre :

$$y' + \frac{1}{1+t}y = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

**3)** Trouver par la méthode de la variation de la constante une solution particulière $y_p$ de l'équation (E), avec second membre .

**4)** Conclure, en donnant la solution (sur $I$) générique $y$ de (E).