CORRIGÉ de l'Examen d'Algèbre Linéaire 2

EXERCICE 1 :

1. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = (1)$ matrice "1×1",

$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ matrice "3×3"

2. $\det(AB) = 1$ et $\det(BA) = 0$ car ses lignes sont proportionnelles.

3. $\det(BAC) = \det((BA)\cdot C) = \det(BA)\cdot \det C = 0 \cdot \det C = 0$.

EXERCICE 2 :

1.a) $A \equiv \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ car la colonne C_i est l'écriture en $\mathcal{B}$ de $f(\vec{e}_i)$, $i = 1,2,3$.

1.b) $\det A = 0$ car les colonues C_1 et C_3 sont identiques. Donc A n'est pas inversible.
Pour le rang, on vient de montrer qu'il ne peut être 3. Alors on cherche un mineur 2×2 ayant une valeur $\neq 0$.
Par exemple : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ et, étant de taille 2×2, on déduit $\mathrm{rang} A = 2$.

1.c) $\mathrm{rang} A = 2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = 2$.
Or, on sait que l'image de f est engendrée par les vecteurs $f(\vec{e}_i)$ où $\overrightarrow{e_i} \in \mathcal{B}$, $i = 1,2,3$, donc il suffit de sélectionner deux d'entre eux qui forment une famille libre. Comme $f(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_3)$ on sélectionnera $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$, donc la base de $\mathrm{Im} f$ recherchée sera $\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} = (f(\vec{e}_1); f(\vec{e}_2)) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right)$.
Par le Théorème du rang : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1$.
$\mathrm{Ker} f := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Cette équation équivaut à $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Donc $\mathrm{Ker} f = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$. Donc une base du $\mathrm{Ker} f$ est : $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

1.d) Il suffit de montrer que $\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f}$ est une famille libre.
En effet, le cas échéant, ceci assure que la somme est directe. De surcroit, $\mathrm{card}\left(\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f}\right) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ montre que la famille $\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f}$ engendre $\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Or, l'indépendance linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f}$ équivaut à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ ce qui a lieu ssi la matrice est inversible donc ssi son déterminant est non-nul. Or, celui-ci vaut $\left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 1 \neq 0$.

2.a) Cf. au cours, si u et v sont deux applications linéaires : $E \to F$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont bases dans E et F resp. et $\forall \lambda$ scalaire, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(u + \lambda v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(u) + \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(v)$.
Dans notre cas Id et f sont endomorphismes de $\mathbb{R}^3$. On a donc : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id} - f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) + (-1)\cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Or, $\forall \mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \equiv \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \mathbb{1}_3$, d'où la relation désirée.

2.b) $\mathbb{1}_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rang}(\mathbb{1}_3 - A) = 1$.
Il s'en suit que pour donner une base de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$ on prendra la seule colonne non-triviale de la matrice $\mathbb{1}_3 - A$, à savoir $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ (car les colonnes 2 et 3 sont proportionnelles). Donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f) = \mathrm{Vect} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

2.c) Il n'y a rien à montrer si on observe que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$ sont engendrés par le même vecteur, donc on a $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$.

3. Non, on ne peut pas, car (1.d) dit que $\mathrm{Ker} f$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im} f$ dans $\mathbb{R}^3$ et (2.c) dit que $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$ est (a priori) *un autre* supplémentaire de $\mathrm{Im} f$ dans $\mathbb{R}^3$, mais comme un même espace vectoriel peut admettre plusieurs supplémentaires différents entre eux, ceci ne nous permet pas d'affirmer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$ juste à base de $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f) \oplus \mathrm{Im} f$.

EXERCICE 3 :

1.a) $P'(X) = -2\left(2-6X^2+4X^3\right) = -4\left(1-3X^2+2X^3\right)$
$P''(X) = -4\left(-6X+6X^2\right) = -24\left(-X+X^2\right) = 24X(X-1)$.

1.b) α est racine de multiplicité 3 ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$.
Or, de $P''(\alpha) = 0$ en déduit que $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Mais $\alpha = 0$ ne convient pas car $P'(0) = -4 \neq 0$ et $\alpha = 1$ convient car $P'(1) = 0 = P(1)$. Donc $\alpha = 1$ est la racine triple recherchée.
Observation : de toutes les manières, α, si racine triple, ne pouvait être que réelle, car P étant à coefficients réels s'il admettait une racine triple purement complexe, il admettrait sa conjuguée complexe comme racine aussi, et avec la même multiplicité, ce qui serait impossible car alors on aurait $d^\circ P = 6 > 4$.

1.c) Faisons la division euclidienne de $-\frac{1}{2}P(X)$ par $(X-1)^3$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^4 - 2X^3 & & +2X & -1 & X^3-3X^2+3X-1 \\ \cline{5-5}
-X^4+3X^3 & -3X^2 & +X & & X+1 \\ \cline{1-4}
/ \quad X^3 & -3X^2 & +3X & -1 & \\
-X^3 & +3X^2 & -3X & +1 & \\ \cline{1-4}
/ & / & / & / &
\end{array}$$

1.d) Puisque $(X-1)^3$ divise $-\frac{1}{2}P(X)$ avec quotient $X+1$, on a la factorisation : $P(X) = -2(X-1)^3(X+1)$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = -1$.

2) Par exemple, on pourrait, pour un premier pas remplacer la colonne C_1 par $C_1 - C_2$ et C_2 par $C_2 - C_3$. Ensuite, après avoir mis $X-1$ en facteur dans les premières deux (nouvelles) colonnes, on pourrait continuer en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
P(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 & -X \\ 1-X & X-1 & 1 & X \\ X-1 & 1-X & X & -1 \\ 1-X & 0 & X & 1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -X \\ -1 & 1 & 1 & X \\ 1 & -1 & X & -1 \\ -1 & 0 & X & 1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -X \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & X-1 & X-1 \\ 0 & 0 & X+1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -X \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & X-1 \\ 0 & 0 & X+1 & 1-X \end{vmatrix} = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -X \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & X-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-X) \end{vmatrix} \\
&= (X-1)^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (X+1) \cdot 2(1-X) = -2(X-1)^2(X+1).
\end{aligned}$$

EXERCICE 4 :

1) $t \in I =]-1, \infty[\Leftrightarrow t > -1 \Leftrightarrow t+1 > 0$. L'inégalité étant stricte, on peut toujours diviser par $t+1$ l'équation $(\star)$ pour obtenir l'équation normalisée $(\star\star)$. Ainsi, $(\star) \Leftrightarrow (\star)$ sur I ce qui veut dire qu'elles ont le même ensemble de solutions sur I.

2) L'équation (E_0) est du type $z' + az = 0$ donc équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans second membre et on sait qu'elle admet une solution générique du type $I \ni t \mapsto z_0(t) = \lambda e^{-A(t)}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ où A est une primitive de $a : I \to \mathbb{R}$ (continue puisque $I \ni t \mapsto a(t) = \dfrac{1}{1+t}$).
À chaque $t_0 \in I$ fixé correspond une et une seule primitive A_{t_0} de a. Elle sera donc donnée par :

$$I \ni t \mapsto A_{t_0}(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+s} ds = \int_{t_0}^{t} \frac{(1+s)'}{1+s} ds = \Big[\ln|1+s|\Big]_{t_0}^{t} = \ln(1+t) - \ln(1+t_0).$$

Mais $[t_0, t] \subset]-1, \infty[$ donc en choisissant convenablement t_0 par exemple $= 0$ on obtient $\ln(1+t_0) = \ln 1 = 0$ et ainsi on déduit la solution générique de (E_0) comme $I \ni t \mapsto z_0(t) = \lambda e^{-\ln(1+t)} = \lambda e^{\ln\left((1+t)^{-1}\right)} = \dfrac{\lambda}{1+t}$.
En conclusion, l'espace vectoriel des solutions de (E_0) est $\mathscr{Z}_{0,I} = \mathrm{Vect}\left\{ I \ni t \mapsto \dfrac{1}{1+t} \right\}$.

3) Pour trouver une solution particulaire $z_p : I \to \mathbb{R}$ de l'équation avec second membre (E), on la propose de le forme $z_p = \lambda z_0$ où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est fonction dérivable sur I (à voir comme fonction inconnue) et z_0 est une des solutions de (E_0). Alors, en remplaccant z_p dans (E) on a :

$$(\lambda z_0)' + \frac{1}{1+t}\lambda z_0 = \frac{2}{(1+t)^2} \iff \lambda' z_0 + \lambda \underbrace{(z_0' + \frac{1}{1+t} z_0)}_{=0 \text{ par hyp.}} = \frac{2}{(1+t)^2} \iff \lambda' z_0 = \frac{2}{(1+t)^2}$$

et, en prenant $z_0(t) = \dfrac{1}{1+t}$ on a :

$$\lambda'(t) = \frac{2}{1+t} \implies \lambda(t) = 2\int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s = 2\int_{t_0}^{t} \frac{(1+s)'}{1+s}\,\mathrm{d}s = 2\Big[\ln(1+s)\Big]_{t_0}^{t} = 2\ln(1+t)$$

où le choix $t_0 = 0$ a été à nouveau fait. En conclusion, une solution particulière z_p de (E) sur I est :

$$I \ni t \mapsto z_p(t) = \lambda(t)\cdot z_0(t) = \frac{2\ln(1+t)}{1+t}$$

4) Conformément au C.M., "la" solution générique de (E) sur I est de la forme $z = z_0 + z_p$ avec z_0 solution générique de (E_0) (trouvée à la question (2)) et z_p solution particulière de (E) (trouvée à la question (3)).
Donc l'ensemble $\mathscr{Z}_I$ des solutions de (E) sur I est de la forme :

$$\mathscr{Z}_I = \mathscr{Z}_{0,I} + \{z_p\} = \left\{ I \ni t \mapsto \frac{\lambda}{1+t} + \frac{2\ln(1+t)}{1+t} \,\middle|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

5) On observe que si dans ($\star\star$) on fait un changement de fonction inconnue en posant $y' = z$ alors ($\star\star$) équivaut à (E). Par conséquent, une solution générique sur I de ($\star\star$) est obtenue en intégrant (primitivisant) la solution générique de (E). On a ainsi $\forall t_0 \in I$:

$$I \ni t \mapsto y(t) := \int_{t_0}^{t} z(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{\lambda}{1+s}\,\mathrm{d}s + 2\int_{t_0}^{t} \frac{\ln(1+s)}{1+s}\,\mathrm{d}s = \lambda\left[\ln(1+s)\right]_{t_0}^{t} + 2\int_{t_0}^{t} \frac{\ln(1+s)}{1+s}\,\mathrm{d}s.$$

La dernière intégrale sera faite par parties :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\ln(1+s)}{1+s}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} (\ln(1+s))'\ln(1+s)\,\mathrm{d}s = \Big[\big(\ln(1+s)\big)^2\Big]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \ln(1+s)(\ln(1+s))'\,\mathrm{d}s$$

d'où, en mettant cette dernière dans le membre de gauche avec le signe changé, on obtient

$$2\int_{t_0}^{t} \frac{\ln(1+s)}{1+s}\,\mathrm{d}s = \Big[\big(\ln(1+s)\big)^2\Big]_{t_0}^{t}$$

et ainsi on déduit :

$$I \ni t \mapsto y(t) := \int_{t_0}^{t} z(s)\,\mathrm{d}s = \lambda[\ln(1+s)]_{t_0}^{t} + \Big[\big(\ln(1+s)\big)^2\Big]_{t_0}^{t}.$$

Remarque : on est à la recherche d'une solution *générique* (et non pas d'une particulière !) donc on n'a pas le droit de choisir une valeur pour t_0 : on doit les prendre toutes en compte, comme si $t_0 \in I$ était un paramètre quelconque de I. On obtient ainsi $\forall(\lambda, t_0) \in \mathbb{R}\times I$:

$$I \ni t \mapsto y(t) = \lambda\ln(1+t) - (\lambda + \ln(1+t_0))\ln(1+t_0) + \big(\ln(1+t)\big)^2.$$

Or, $I \ni t_0 \mapsto \ln(1+t_0) \in \mathbb{R}$ est une application biunivoque. Par conséquent le deuxième terme du membre de droite peut être remplacé par un quelconque paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ indépendant de λ.
Ainsi, la solution générique de ($\star\star$) recherchée sera :

$$I \ni t \mapsto y(t) = \underbrace{\lambda\ln(1+t) + \mu}_{y_0} + \underbrace{\big(\ln(1+t)\big)^2}_{y_p}, \qquad \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}.$$

Noter que les premiers deux termes du membre de droite de l'égalité ci-dessus forment une solution quelconque de l'équation sans second membre attachée à ($\star\star$) alors que le dernier terme est une solution particulière de l'équation avec second membre ($\star\star$).
Alors, si on note par **1** la fonction constante $t \mapsto 1$, et l'ensemble des solutions sur I de ($\star\star$) par $\mathcal{Y}$ et par $\mathcal{Y}_0$ l'espace vectoriel (de dimension 2) des solutions de l'équation sans second membre attachée, on a :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 + \{y_p\} = \mathrm{Vect}\{\ln(1+\mathrm{Id})\,;\,\mathbf{1}\} + \{\big(\ln(1+\mathrm{Id})\big)^2\}$$