Université de Cergy-Pontoise - L1 Examen du 23 mai 2025 - **1ère session**

Examen d'Algèbre Linéaire 2

Durée : 2h

Les documents, les smartphones, les tablettes, les smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction. **Toute réponse sans justification vaut zéro**

EXERCICE 1 : Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 12 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les produits AB et BA.

2) Calculer la valeur des déterminants $\det(AB)$ et $\det(BA)$.

3) En déduire la valeur de $\det(BAC)$ sans calculer ce produit de matrices.

EXERCICE 2 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y,z) := (x-y+z, y, y)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et notons par Id l'automorphisme identique de $\mathbb{R}^3$, à savoir $\mathrm{Id}(x,y,z) := (x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1.a) Donner $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1.b) Calculer son déterminant $\det A$ et décider si A admet une inverse. Quel est le rang de A ?

1.c) En déduire une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\, f$ (image de f) et également la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$, noyau de f. Ensuite, calculer $\mathrm{Ker}\, f$ en donnant une base.

1.d) Montrer qu'on a : $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$.

2.a) Justifier qu'on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id} - f) = \mathbb{1}_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ où $\mathbb{1}_3$ est la matrice unité 3×3.

2.b) Calculer $\mathrm{rang}(\mathbb{1}_3 - A)$ et en déduire une base de l'espace image $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$.

2.c) Montrer qu'on a : $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f) \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$.

3) Peut-on déduire *uniquement* à base des questions (1.d) et (2.c) que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$? Expliquer brièvement.

EXERCICE 3 : Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par le déterminant $P(X) := \begin{vmatrix} X & 1 & 1 & -X \\ 1 & X & 1 & X \\ X & 1 & X & -1 \\ 1 & X & X & 1 \end{vmatrix}$.

1. Supposons connu le fait que par calcul direct (développement du déterminant suivant des colonnes/lignes) on ait obtenu que $P(X) = -2(X^4 - 2X^3 + 2X - 1)$.

1.a) Calculer les polynômes dérivés P', P'' d'ordres 1 et 2 de P.

1.b) En déduire que P admet une racine α de multiplicité 3 (i.e. racine triple) et la trouver. (Indication : penser à la relation entre multiplicité et dérivées du polynôme)

1.c) En déduire l'autre racine β de P. (Indication : une fois α trouvé, faire une division euclidienne par $(X-\alpha)^3$)

1.d) Conclure, en présentant P sous la forme factorisée $P(X) = -2(X-\alpha)^3(X-\beta)$.

2. Calculer le déterminant qui définit P ci-dessus en faisant des "opérations élémentaires" sur ses lignes / colonnes permettant la mise en facteur successive de polynômes $X - \alpha$ et $X - \beta$ afin d'obtenir directement l'expression factorisée de P donnée à la question (1.d) et, par la même, les valeurs de ses racines α et β.

Tourner la page s.v.p. —>

EXERCICE 4 : On se propose de résoudre sur $I =]-1, \infty[$ l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$(1+x)^2 y'' + (1+x)y' = 2. \tag{$\star$}$$

1) Justifier pourquoi ($\star$) équivaut sur I à :

$$y'' + \frac{1}{1+x} y' = \frac{2}{(1+x)^2} \tag{$\star\star$}$$

2) Trouver l'expression générique d'une solution z_0 de l'équation sans second membre :

$$z' + \frac{1}{1+x} z = 0. \tag{E$_0$}$$

3) Trouver par variation de la constante une solution particulière z_p de l'équation avec second membre

$$z' + \frac{1}{1+x} z = \frac{2}{(1+x)^2}. \tag{E}$$

4) Conclure, en donnant la solution générique z de l'équation (E).

5) En posant $y' = z$, déduire de la question précédente l'expression générique des solutions y de l'équation ($\star\star$) sur I.