Corrigé de l'examen d'Algèbre Linéaire 2

Corrigé de l'EXERCICE 1 :

(1) On utilise la formule " $(n \times p) \times (p \times q) = n \times q''$ donc on a :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } M_1 : & (4\times 3)\times(3\times 1) = 1\times 1 \\ \text{Pour } M_2 : & (3\times 2)\times(2\times 2) = 3\times 2 \\ \text{Pour } M_3 : & (3\times 1)\times(1\times 3) = 3\times 3 \end{array}$$

(2) $M_1 = (-1)$; $\quad M_2 = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; $\quad M_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 \\ 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

(3) $\det M_1 = -1$; $\det M_3 = 0$ car it y a au moins deux lignes/colonnes proportionnelles.

(4) M_1 est inversible car $\det M_1 = -1 \neq 0$. Son inverse M_1^{-1} vérifie $M_1 M_1^{-1} = M_1^{-1} M_1 = \mathbf{1}$ où $\mathbf{1} = (1)$ la matrice unité 1×1. Donc $M_1^{-1} = (-1) = M_1$.

M_3 n'est pas inversible car $\det M_3 = 0$.

(5) $\operatorname{rang} M_1 = 1$ (cf. (3)). Pour M_2, le mineur $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$ donc $\operatorname{rang} M_2 = 2$ vu que $\operatorname{rang} M_2 < 3$ cf. (3).

Concernant M_3 on voit à l'oeil nu que *toutes* les ligues / colonnes sont proportionnelles, donc non seulement $\det M_3 = 0$ mais aussi tous ses mineurs 2×2 valent zéro donc nécessairement $\operatorname{rang} M_3 = 1$, car par exemple le mineur $|-2| = 2$ est non-nul.

(6) Voyons M_3 comme matrice d'une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Alors $\mathscr{K}_3 = \operatorname{Ker} g$ et par le théorème du rang $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rang} g \Leftrightarrow \dim \mathscr{K}_3 = 3 - 1 = 2$.

(7) $M_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ équivaut à un système de 3 équations scalaires mais comme toutes les lignes de M_3 sont proportionnelles, toutes les équations du système seront proportionnelles, donc le système se réduit à une seule équation : $x + y - 5z = 0$. Alors, en prenant comme paramètres $y = \lambda$ it $z = \mu, \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on obtient $x = -2x + 5\mu$, donc :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda + 5\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{Ker} g = \mathscr{K}_3 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et ces deux vecteurs sont linéairement indépendants car non-proportionnels, donc on a une base de $\mathscr{K}_3$.

(8.a) $f(x, y) = {}^{\mathrm{t}}\!\left[M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = (-2x + 4y, -8x - 10y, 4x + 12y)$

(8.b) Par (5) : $\operatorname{rang} M_2 = \operatorname{rang} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\dim \operatorname{Im} f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et comme $\mathbb{R}^3$ est l'espace d'arrivée pour f, donc f n'est pas surjective.

Par le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^2 - \operatorname{rang} f$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f = 2 - 2 = 0$ i.e. $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ i.e. f est injective.

(8.c) Si f était bijective, elle établirait un isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ at $\mathbb{R}^3$ ce qui est impossible vu qu'ils ont des dimensions différentes.

Corrigé de l'EXERCICE 2 :

(1.a)

$$\begin{aligned} P(X) &= X \cdot \begin{vmatrix} X & 1 \\ 1 & X \end{vmatrix} + (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & X \end{vmatrix} + X \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ X & 1 \end{vmatrix} \\ &= X\left(X^2 - 1\right) - (X - 1) + X \cdot (1 - X) \\ &= X^3 - X^2 - X + 1. \end{aligned}$$

(1.b) $P'(X) = 3X^2 - 2X - 1$. On a $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 3\cdot(-1) = 16 \Rightarrow x'_\pm = \dfrac{2\pm 4}{2\cdot 3} = \begin{cases} 1 \\ -1/3 \end{cases}$
(1.c) $P(1) = P'(1) = 0$ par simple vérification. Donc 1 est racine double (an moins !) pour P.
(1.d) $\deg P = 3$ et (1.d) $\Rightarrow \exists Q$ t.q. $P(X) = (X-1)^2 Q(X)$ et $\deg Q = 1$, donc $Q(X) = X - \beta$ (compte tenu que le coefficient du terme dominant de P est 1) donc β est l'autre racine de P.
(1.e) On peut faire une division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^2$ pour trouver $Q = X - \beta$:

$$\begin{array}{rrrr|l} X^3 & -X^2 & -X & +1 & X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 \\ \cline{5-5} -X^3 & +2X^2 & -X & & X + 1 =: Q(X) \\ \cline{1-3} & X^2 & -2X & +1 & \\ & -X^2 & 2X & -1 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

D'où $\beta = -1$ et donc $P(X) = (X-1)^2(X+1)$.
(1.f) La division euclidienne de P par P' s'écrit : $P = P'Q + R$ avec $\deg R < \deg P' = 2$ et en considérant ceci pour des fonctions polynomiales en $x = 1$ on a :

$$P(1) = P'(1)\cdot Q(1) + R(1) \ \Leftrightarrow\ 0 = 0\cdot Q(1) + R(1) \ \Leftrightarrow\ R(1) = 0.$$

Or $\deg R = 1 \Leftrightarrow R = aX + b$ avec unique racine 1. Donc $R = \lambda(X-1)$.
(2)

$$P(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ X & 1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ 1-X & X-1 & 1 \\ X-1 & 1-X & X \end{vmatrix} = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1).$$

d'où $\alpha = 1$ et $\beta = -1$.

Corrigé de l'EXERCICE 3 :

(1) Sur $I =]0,\pi[$, la fonction "sin" est strictement positive donc pas de danger à diviser par elle. On obtient ainsi sur I une équation normalisée équivalente à l'équation initiale.
(2) La solution générale de (E_0) est : $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, et $\forall (t_0, t) \in I^2$,

$$\tilde{y}(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\cos(s)}{\sin(s)}\,\mathrm{d}s\right) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{(\sin(s))'}{\sin(s)}\,\mathrm{d}s\right) = \lambda \mathrm{e}^{\left[\ln(\sin(s))\right]_{t_0}^{t}} = \frac{\lambda}{\sin(t_0)}\cdot \sin(t)$$

on note $\lambda' = \lambda/\sin(t_0)$ et alors "$\forall\lambda \in \mathbb{R}$" équivaut à "$\forall\lambda' \in \mathbb{R}$". En conclusion :

$$\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\{\ ]0,\pi[\ \ni t \mapsto \sin(t)\}$$

(3) On pose $y_{\mathrm{p}} = \lambda\tilde{y}$ avec $\tilde{y}$ solution une de (E_0) (à choisir convenablement), et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ fonction inconnue, dérivable sur I. Alors, en remplacant dans (E) on a :

$$\lambda'\tilde{y} + \lambda\left(\tilde{y}' - \mathrm{cotan}(t)\tilde{y}\right) = 2t\sin(t) \Leftrightarrow \lambda'\tilde{y} = 2t\sin(t) \Leftrightarrow \lambda' = 2t \Leftrightarrow \lambda(t) = t^2 + C,\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

Comme on cherche une solution particulière, on prendra $C = 0$ et on obtient ainsi celle-ci sous la forme : $I \ni t \mapsto y_{\mathrm{p}}(t) = t^2\sin(t)$.
(4) En conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) sur I est :

$$\mathscr{S} = \{I \ni t \mapsto t^2\sin(t)\} + \mathrm{Vect}\{I \ni t \mapsto \sin(t)\} = \{(\bullet)^2\sin\} + \mathscr{S}_0.$$