

Examen d'Algèbre Linéaire 2**Durée : 1h30***Les documents, les smartphones, les tablettes, les smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés**Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction. Toute réponse sans justification vaut zéro***Exercice 1 :** Soit les produits de matrices suivants :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- 1) Pour chacune de ces trois matrices produit indiquer leurs tailles sous la forme $i \times j$ avant de faire le produit.
- 2) Effectuer les trois produits pour trouver explicitement M_1 , M_2 et M_3 .
- 3) Calculer les déterminants $\det M_1$ et $\det M_3$.
- 4) Les matrices M_1 et M_3 sont-elles inversibles ? Le cas échéant, donner leur inverse.
- 5) Calculer les rangs des trois matrices M_1 , M_2 et M_3 à l'aide des déterminants.
- 6) Donner la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{K}_3$ des solutions l'équation $M_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 7) Ensuite, trouver $\mathcal{K}_3$ en indiquant une base de celui-ci.
- 8) Soit M_2 la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(f)$ d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dans une paire de bases canoniques $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ des espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
 - 8.a) Donner, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $f(x, y)$ comme vecteur à trois composantes (de $\mathbb{R}^3$).
 - 8.b) L'application f est-elle surjective ? Injective ? (justifier !)
 - 8.c) Sans faire appel à la question précédente, comment peut-on décider tout de suite si f est ou non bijective ?

Exercice 2 : Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par le déterminant : $\begin{vmatrix} X & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ X & 1 & X \end{vmatrix} =: P(X)$.

- 1.a) En développant le déterminant suivant la première colonne, montrer que $P(X) = 1 - X - X^2 + X^3$.
- 1.b) Calculer $P'(X)$ le polynôme dérivée de $P(X)$ et trouver ses racines.
- 1.c) Montrer que $P(X)$ et $P'(X)$ ont une racine α commune, que l'on trouvera.
- 1.d) Justifier pourquoi P admet une factorisation sur $\mathbb{R}$ du type $P(X) = (X - \alpha)^2(X - \beta)$.
- 1.e) Trouver l'autre racine β de $P(X)$.
- 1.f) Justifier sans calcul pourquoi en divisant P par $P'(X)$ on obtient un reste $R(X)$ qui a comme unique racine simple α .
2. Calculer le déterminant qui définit $P(X)$ en faisant dessus des "opérations élémentaires" permettant la mise en facteur successive de polynômes $X - \alpha$ afin d'obtenir directement l'expression factorisée de $P(X)$ donnée à la question (1.d) et par la même les valeurs de ses racines α et β .

Exercice 3 : On se propose de résoudre sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle suivante (ayant comme inconnue la fonction dérivable $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) :

$$y' \sin(t) - y \cos(t) = 2t \sin^2(t). \quad (*)$$

1) Justifier pourquoi $(*)$ équivaut sur $I =]0, \pi[$ à l'équation normalisée :

$$y' - y \cotan(t) = 2t \sin(t), \quad (E)$$

où $\cotan := \frac{\cos}{\sin} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$.

2) Résoudre sur I l'équation différentielle homogène attachée à (E), à savoir :

$$y' - y \cotan(t) = 0. \quad (E_0)$$

Présenter ensuite l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$ de (E_0) sous la forme d'un espace vectoriel.
(Indication : $\int \frac{u'}{u}$)

3) Trouver une solution particulière y_p de l'équation (E).

(Indication : on pourrait appliquer la méthode de la variation de la constante en posant $y_p = \lambda \tilde{y}$ avec λ fonction dérivable et $\tilde{y}$ une solution de (E_0) et on trouvera une équation différentielle en fonction inconnue λ qu'on résoudra.)

4) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E).