CORRIGÉ de l'Examen d'Algèbre Linéaire 2

EXERCICE 1 :

1.a) $P := 1-X^2 = (1-X)(1+X) \Rightarrow$ Racines $x_\pm = \pm 1$.

$$\begin{cases} 0 = Q(1) = -a-b+a+2b-b \Leftrightarrow 0=0 \Leftrightarrow 1 \text{ est racine de } Q\ \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2; \\ 0 = Q(-1) = -a-b-a-2b-b = -2(a+2b) \Leftrightarrow -1 \text{ est racine de } Q \text{ ssi } a+2b=0. \end{cases}$$

1.b) Rappel : α est racine d'ordre m du polynôme A ssi

$$A(\alpha) = A'(\alpha) = \ldots = A(\alpha)^{(m-1)} = 0 \text{ et } A^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Pour notre cas, on a : $\begin{cases} Q' = a+2b-2bX \\ Q'' = -2b, \end{cases}$ donc $\begin{cases} Q'(1) = a+2b-2b = a \\ Q'(-1) = a+2b+2b = a+4b, \end{cases}$

et $Q''(\pm 1) \neq 0$ ssi $b \neq 0$ ce qui montre que (compte tenu de (1.a)) :

$x_+ = 1$ est racine double de Q ssi $a=0$ i.e. $Q = -b\left(1-2x+X^2\right) = \lambda(1-X)^2$, $\forall\lambda\neq 0$.

$x_- = -1$ racine double de Q ssi : $\begin{cases} a+2b=0 \\ a+4b=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 = b \neq 0$ impossible donc $Q \in \emptyset$.

Autre argument pour -1 : à (1.a) on a montré que $x_+ = 1$ est racine $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, or, comme $\deg Q = 2$, $x_- = -1$ ne peut être racine *double* de Q pour *aucun* couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

2. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$; $Q = \begin{pmatrix} -a-b \\ a+2b \\ -b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$; $R = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

3.a) $\det M = 2(a+2b)$. En effet, en faisant $L_1+L_2+L3 \rightsquigarrow L_2'$ et $L_1+L_3 \rightsquigarrow L_3'$ on a :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -a-b & -2 \\ 0 & a+2b & 7 \\ -1 & -b & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a-b & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -a-2b & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\cdot 2\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 0 & a+2b \end{vmatrix} = 2(a+2b).$$

3.b) M inversible ssi $\det M \neq 0$ donc ssi $a+2b\neq 0$.

4.a) Si $a=-1/2$ et $b=1/2$, alors $\det M = 2\left(-\frac12 + 2\cdot\frac12\right) = 1$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac12 & 7 \\ -1 & -\frac12 & -3 \end{pmatrix}$.

La formule de l'inverse $M^{-1} = \dfrac{\left((-1)^{i+j}\det M_{ji}\right)_{i,j=1,2,3}}{\det M} = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(M)}{\det(M)}$ demande le calcul de :

$$\mathrm{Com}(M) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} \frac12 & 7 \\ -\frac12 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & \frac12 \\ -1 & -\frac12 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -\frac12 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ \frac12 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac12 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \frac12 \\ 1 & -5 & \frac12 \\ 1 & -7 & \frac12 \end{pmatrix},$$

Donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & -7 \\ \frac12 & \frac12 & \frac12 \end{pmatrix}$.

4.b) La définition de M et $\det M \neq 0$ montre que $\mathcal{F} = \{P,Q,R\}$ est base de $\mathbb{R}^3$, i.e. M est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$. Donc M^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{B}$ et ses colonnes sont les coordonnées de X^0, X^1 et X^2 dans la base $\mathcal{F}$. Donc : $X^0 = 2P-7Q+\frac12 R$, $X^1 = P-5Q+\frac12 R$, $X^2 = P-7Q+\frac12 R$.

EXERCICE 2 :

1. On a $\cos(2t)+3 \geq -1+3=2>0$ donc on peut diviser (E) par $\cos(2t)+3$ sans souci $\forall t \in \mathbb{R}$ et on obtient une équation normalisée équivalente : (EN).

2. Une équation SSM : $y'+ay=0$ a la solution générale $t \mapsto \widetilde{y}(t)=\lambda e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Dans notre cas : $a(t)=\dfrac{2\sin(2t)}{\cos(2t)+3}=-\dfrac{(\cos(2t)+3)'}{\cos(2t)+3}=-\dfrac{u'}{u}$ où $u:=\cos(2\bullet)+3$. Donc

$$\begin{aligned}\widetilde{y}(t) &= \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{u(s)}\,\mathrm{d}s\right)=\lambda \exp\left(\left[\ln|u(s)|\right]_{t_0}^{t}\right)=\lambda \exp\left(\ln|u(t)|-\ln|u(t_0)|\right)\\ &= \lambda \mathrm{e}^{-\ln|u(t_0)|}\cdot \mathrm{e}^{\ln|u(t)|}\equiv \widetilde{\lambda}\mathrm{e}^{\ln|u(t)|}=\widetilde{\lambda}|u(t)|.\end{aligned}$$

Or $u(t)=\cos(2t)+3>0$ donc $|u|=u$ sur $\mathbb{R}$. Aussi, pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$ l'application $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \widetilde{\lambda}:=\lambda \mathrm{e}^{-\ln|u(t_0)|} \in \mathbb{R}$ est bijective, autrement dit "$\forall \lambda \in \mathbb{R}$" équivaut à "$\forall \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}$". En conclusion, en re-notant $\widetilde{\lambda}$ par λ, on obtient la solution générale de (EN_0) comme :

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \widetilde{y}(t)=\lambda\big(\cos(2t)+3\big), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

donc l'espace vectoriel des solutions de (EN_0) est $\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}\{\cos(2\bullet)+3\}$.

3. Variation de la constante : $y_p=\lambda\widetilde{y}$ avec λ fonction dérivable inconnue, mis en (EN) :

$$\lambda'\tilde{y}+\lambda\underbrace{(\tilde{y}+ay)}_{=0}=b \ \text{ où } \ b(t)=\sin(-t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\big(\cos(2t)+3\big)$$

Équivaut à : $\lambda'\tilde{y}=b \Leftrightarrow \left[\lambda'(t)-\sin(-t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\right]\big(\overbrace{\cos(2x)+3}^{\neq 0}\big)=0$. Or $\sin(-t)=-\sin(t)$ et comme $\left(e^{\cos(t)}\right)'=-\sin(t)e^{\cos(t)}$, on déduit :

$$\lambda'\tilde{y}=b \Leftrightarrow \lambda'(t)=\left(e^{\cos(t)}\right)' \Leftrightarrow \lambda(t)=e^{\cos(t)}+\mu \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

et on prendra $\mu=0$ car or cherche une solution particulière seulement. Donc on a trouvé une solution particulière de (EN) sous la forme :

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto y_{\mathrm{p}}(t)=e^{\cos(t)}(\cos(2t)+3).$$

4. Compte tenu des questions (2) et (3), on a la solution générale de (EN), donc de (E), sous la forme :

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto y(t)=(\lambda+e^{\cos(t)})\big(\cos(2t)+3\big), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

autrement dit, l'espace vectoriel des solutions de (E) est

$$\mathscr{S}=\{y_{\mathrm{p}}\}+\mathscr{S}_0=\{\mathrm{e}^{\cos}(\cos(2\bullet)+3)\}+\mathrm{Vect}\{\cos(2\bullet)+3\}.$$

5. Si $y(\frac{\pi}{2})=0$ alors compte tenu de (4), on a : $0=(\lambda+e^0)(-1+3) \Leftrightarrow \lambda=-1$ donc la solution unique avec donne initiale fixée est :

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto y(t)=(e^{\cos(t)}-1)\big(\cos(2t)+3\big).$$

EXERCICE 3 :

1. On calcule $\begin{cases} f(1,0,0) & = & (1,2,1) \\ f(0,1,0) & = & (-1,1,2) \\ f(0,0,1) & = & (1,3,2) \end{cases}$ et on forme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ (par définition) en mettant comme colonnes ces résultats de l'action de f sur les vecteurs de la base canonique.

2. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ où pour la première égalité on a fait les opérations élémentaires entre des colonnes de A suivantes : $C_1 + C_2 \rightsquigarrow C_2'$ et $-C_1 + C_3 \rightsquigarrow C_3'$, et pour la deuxième égalité on a tenu compte que les deux dernières colonnes sont proportionnelles.

3. f est endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc "bijectif $\Leftrightarrow$ injectif $\Leftrightarrow$ surjectif" et comme A n'est pas inversible , f n'est pas bijective donc f n'est ni injective ni surjective.

4. Comme $\det A = 0$ on passe aux mineurs d'ordre 2. Par exemple $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc $\mathrm{rang} A = 2$ car 2 est la taille du plus grand mineur non-nul.

5. On sait que l'espace vectoriel $\mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$ est engendré par les images par f d'une base de l'espace de départ (dans notre cas c'est $\mathbb{R}^3$), i.e. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)\}$ où $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1; \boldsymbol{e}_2; \boldsymbol{e}_3)$. Or, à la question (4) on a établi que $2 = \mathrm{rang} A = \mathrm{rang} f := \dim \mathrm{Im} f$. Donc une base de $\mathrm{Im} f$ est par exemple $\mathscr{I} := (f(\boldsymbol{e}_1); f(\boldsymbol{e}_2))$ car ces vecteurs sont non-proportionnels donc $\mathscr{I}$ est libre. On pose donc : $\boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{w} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Par le théorème du rang : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rang} f$ donc $\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1$.

7. On résout $f(x,y,z) = (0,0,0)$ ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{\boldsymbol{u}\}$ où $\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ forme à lui seul la base $\mathscr{K}$ de $\mathrm{Ker} f$ (puisque $\dim \mathrm{Ker} f = 1$ cf. question (6)).

8.a) Puisque $B := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ on a $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ où pour la première égalité on a fait les opérations élémentaires entre des colonnes de B : $C_1 + 4C_3 \rightsquigarrow C_1'$ et $C_2 + C_3 \rightsquigarrow C_2'$, et pour la deuxième égalité on a tenu compte que les deux premières colonnes sont proportionnelles.

8.b) De (8.a) on déduit que $\mathscr{F} = \{\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}; \boldsymbol{w}\}$ n'est pas libre, et comme $\mathscr{I} = \{\boldsymbol{v}; \boldsymbol{w}\}$ est libre car base de $\mathrm{Im} f$, nécessairement $\boldsymbol{u}$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ donc $\mathrm{Ker} f \subsetneq \mathrm{Im} f$, donc $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f$.

8.c) On a d'après (8.b) :

- $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^3$ car $\dim \mathrm{Im} f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
- la somme $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$ ne peut être directe, car $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f \supsetneq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

EXERCICE 4 :

Remarque : si un des trois polynômes de la famille $\mathcal{F}$ était nul, la famille serait liée. En particulier si R était nul, on aurait $A = B \cdot Q$ sans condition de degré à imposer à Q. D'où l'hypothèse de l'exercice : aucun des polynômes de $\mathcal{F}$ n'est le polynôme nul O.

Donnons deux rédactions pour la solution de cet exercice :

Solution 1 : On sait : $\begin{cases} A = BQ + R & (1) \\ \deg R < \deg B & (2) \end{cases}$. On a alors $\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha A + \beta B + \gamma R = O \quad \overset{(\star)}{\iff} \quad (\alpha Q + \beta)B + (\alpha+\gamma)R = O \quad \overset{(\star\star)}{\iff} \quad \begin{cases} \alpha Q + \beta = O \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

En effet, pour $(\star)$ on a tenu compte de (1) et pour $(\star\star)$ on a utilisé (2) et $B \neq O \neq R$.
On a alors deux cas de figure par rapport à l'identité de la droite de $(\star\star)$:

1) $\deg Q \geq 1$:

Alors $\deg \beta < 1 \leq \deg(\alpha Q)$ donc nécessairement $\alpha = \beta = 0$ et donc $\gamma = -\alpha = 0$.
On vient de montrer ainsi que (ii) $\Rightarrow$ (i).

2) $\deg Q < 1$, autrement dit Q est le polynôme constant $= q \in \mathbb{R}$.

Alors $\begin{cases} \alpha Q + \beta = O \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = -\alpha q \\ 0 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma = -\alpha \end{cases}$ donc en prenant α comme paramètre quelconque, ce système a une infinité de solutions $(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha(1,-q,-1)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
On peut donc exhiber le triplet $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,-q,-1)$ qui est $\neq (0,0,0)$ peu importe la valeur de q, pour lequel l'identité à gauche de $(\star)$ est satisfaite, donc la famille $\mathcal{F}$ est liée.
On vient ainsi de montrer que "Non (ii)" $\Rightarrow$ "Non (i)", i.e. (i) $\Rightarrow$ (ii).

Solution 2 : Il y a un cas "trivial" qu'il faut traiter et éliminer : $\deg A < \deg B$. Alors, la division euclidienne s'écrit nécessairement (puisque $B \neq O$) comme $A = B \cdot O + A$ i.e. $Q = O$ et $R = A$. Pour ce cas on a donc $\mathcal{F} = \{A; B; A\}$ (on a mis A pour R en dernière position) donc est liée en tant que famille à 3 vecteurs, mais, comme dit auparavant, ceci équivaut à $\deg Q = -\infty < 1$ donc (i) $\Leftrightarrow$ (ii) pour ce cas.

Montrons à présent que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) en toute sa généralité (hormis le cas ci-dessus) :

(ii) $\Rightarrow$ (i) : L'hypothèse $A = B \cdot Q + R$ implique, en termes de degré de ces polynômes :

$$\deg A = \max\{\deg B \cdot \deg Q\, ; \deg R\} = \deg B \cdot \deg Q = \deg B + \deg Q \geq \deg B + 1$$

où pour la deuxième égalité on a utilisé l'hypothèse $\deg B \geq \deg R + 1$, et (ii) pour la fin. Donc $\deg A > \deg B > \deg R$ i.e. $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs polynômes avec des degrés échelonnés et de ce fait elle est libre.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Nous allons plutôt montrer la contraposée Non (ii) $\Rightarrow$ Non (i). Montrons donc : Q est polynôme constant $q \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ t.q. $\alpha A + \beta B + \gamma R = O$ $(*)$.

Sous l'hypothèse "Non (ii)", l'identité $A = B \cdot Q + R$ devient $1 \cdot A + (-q) \cdot B + (-1) \cdot R = O$ ce qui nous fournit le triplet $(\alpha,\beta,\gamma) := (1,-q,-1) \neq (0,0,0)$ tel que $(*)$ est satisfaite, donc la famille $\mathcal{F}$ est liée.