Université de Cergy-Pontoise - L1 Examen du 24 mai 2024 - **1ère session**

Examen d'Algèbre Linéaire 2

Durée : 2h

Les documents, les smartphones, les tablettes, les smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction. ***Toute réponse sans justification vaut zéro***

Les questions marquées d'un astérisque peuvent être un peu plus difficiles : vous pourrez les laisser pour la fin

EXERCICE 1 : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un couple de paramètres réels et soit la famille de polynômes $\mathcal{F} = \{P,Q,R\}$ où $P = 1 - X^2$, $Q = -(a+b) + (a+2b)X - bX^2$ et $R = -2 + 7X - 3X^2$.

1.a) Donner les racines de P.
Pour quels couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ une des racines de P est aussi racine de Q ?
(faire la discussion pour chaque racine de P à part)

1.b) Pour quels couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ une des racines de P est racine *double* de Q ?
Discuter pour chaque racine de P à part et donner l'expression de Q pour chaque cas.

2. Écrire P, Q et R sous forme de vecteurs-colonne (de $\mathbb{R}^3$) de leur coordonnées dans la base canonique $(1;X;X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

3.a) Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -a-b & -2 \\ 0 & a+2b & 7 \\ -1 & -b & -3 \end{pmatrix}$ en fonction de a et b.
(Suggestion : additionner les lignes 1 et 3 à la ligne 2 puis vous verrez...)

3.b) En déduire pour quels couples (a,b) la matrice M est inversible.

4. Soit à présent $(a,b) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4.a) Précisez la valeur de $\det M$ en ce cas et donner la matrice inverse M^{-1} pour ces valeurs de a et b. (détails de calcul de M^{-1} requis !)

4.b)* En déduire les coordonnées des polynômes $X^0 \equiv 1$, $X^1 \equiv X$ et X^2 de la base canonique en fonction de P, Q et R (quand $(a,b) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ donc $Q = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X^2$).

EXERCICE 2 : Soit l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \big(\cos(2t)+3\big)y'(t) + 2\sin(2t)\,y(t) = \sin(-t)e^{\cos(t)}\big(\cos(2t)+3\big)^2. \qquad \text{(E)}$$

1. Justifier brièvement pourquoi est-elle équivalente sur $\mathbb{R}$ à l'équation normalisée

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + \frac{2\sin(2t)}{\cos(2t)+3}y(t) = \sin(-t)e^{\cos(t)}\big(\cos(2t)+3\big). \qquad \text{(EN)}$$

2. Résoudre l'équation sans second membre attachée à (EN) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + \frac{2\sin(2t)}{\cos(2t)+3}y(t) = 0. \qquad (\text{EN}_0)$$

3. Trouver une solution particulière $y_{\rm p}$ de (EN) par la méthode de variation de la constante : on posera $y_{\rm p} = \lambda\,\widetilde{y}$ avec λ fonction dérivable et $\widetilde{y}$ solution de (EN_0) et on trouvera une équation différentielle en fonction inconnue λ qu'on résoudra.

4. En déduire la solution générale de (E).

5. Trouver l'unique solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Tourner la page s.v.p. —>

EXERCICE 3 : Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y+z, 2x+y+3z, x+2y+2z).$$

1. Justifier que $A := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer le déterminant $\det A$ et décider si A est inversible.

3. L'application f est-elle surjective ? Injective ?

4. Calculer $\mathrm{rang}\, A$ (sans préalablement calculer $\mathrm{Ker} f$, par exemple à l'aide des déterminants ou en l'échelonnant).

5. En déduire une base $\mathscr{I}$ de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\, f$ (image de f) comme vecteurs-colonne de leur coordonnées dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ qu'on notera par les lettres $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$...

6. Trouver la dimension de $\mathrm{Ker} f$, le sous-espace noyau de f.

7. Trouver un vecteur $\boldsymbol{u}$ de la base $\mathscr{K}$ de $\mathrm{Ker} f$ en le donnant comme vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

8. Notons $\mathscr{F} := \mathscr{K} \cup \mathscr{I}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ réunion des bases de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im}\, f$. Formons une nouvelle matrice B carrée 3×3 avec les vecteurs colonne $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ de $\mathscr{F}$ (déduits auparavant aux questions 7 et 6 respectivement).

8.a) Calculer $\det B$.

8.b)* En déduire le sous-espace somme $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im}\, f$ (avec justification !).

8.c) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\, f$? Justifier la réponse tant pour "=" que pour "$\oplus$".

EXERCICE 4* : Soit $A, B, R \in \mathbb{R}[X]$ polynômes non-nuls vérifiant le théorème de division euclidienne : $\exists !\, Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = B \cdot Q + R$ et $\deg R < \deg B$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $\mathscr{F} := \{A, B, R\}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$

(ii) $\deg Q \geq 1$.