7,5pts **Exercice I.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on considère

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & x^2 \end{pmatrix}$$

0,5+0,5 (1) Sans faire de calculs, montrez que $\det(A(1)) = 0$ et que $\det(A(2)) = 0$.

0,5+0,5 (2) Trouvez le rang de la matrice $A(1)$ et le rang de la matrice $A(2)$.

0,5 (3) les matrices $A(1)$ et $A(2)$ sont-elles inversibles? Pourquoi?

1+0,5 (4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculez maintenant $\det(A(x))$ en fonction de x et montrer que $x = 1$ et $x = 2$ sont les seules solutions de l'equation

$$\det A(x) = 0.$$

1 (5) On pose $x = 3$. Quel est le rang de la matrice $A(3)$? Justifiez votre réponse.

0,5+1 (6) Montrez que la matrice $A(3)$ est inversible et calculer la matrice inverse $A(3)^{-1}$ de $A(3)$.

1 (7) Montrez que la famille des vecteurs

$$\mathcal{B} = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right),$$

forme une base dans $\mathbb{R}^3$.

14pts

$\boxed{(X-1)^2 \text{ divise } P_3(X)+1}$

Exercice II. On considère $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X-1)^2$ divise le polynôme $P(X) + 1$ et X^2 divise le polynôme $P(X) + 2$.

1 + 0,5 (I.a) Vérifiez que le polynôme $P_3(X) = -2X^3 + 3X^2 - 2$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

X divise $P_3(X)+2$

1 (I.b) Vérifiez que si un polynôme $Q(X)$ est divisible par $X^2(X-1)^2$ alors $P_3(X) + Q(X) \in \mathcal{E}$.

1 (I.c) Trouvez un polynôme $P_4(X)$ de degré 4 appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$.

1 (I.d) Montrez que pour tout $n \geq 3$ il existe un polynôme $P_n(X) \in \mathcal{E}$ de degré n.

On remarque que d'après la question $(I.b)$, pour tout polynôme $S(X) \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = P_3(X) + X^2(X-1)^2 S(X)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$. On se propose maintenant de montrer que pour tout polynôme $P(X) \in \mathcal{E}$ il existe $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = P_3(X) + X^2(X-1)^2 S(X)$.

1 + 1 (II.a) Montrez que si $P(X) \in \mathcal{E}$ et $\tilde{P}(X) \in \mathcal{E}$ alors $P(X) - \tilde{P}(X)$ est divisible par $(X-1)^2$ et par X^2.

(II.b) Pour $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ on considère le polynôme dérivé $Q'(X)$ de $Q(X)$. On suppose dans cette question que $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ est divisible par X^2 et on note $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ le quotient de la division euclidienne de $Q(X)$ par X^2. On a donc

$$Q(X) = X^2 S(X).$$

0,5 i) Montrez que si $a = 1$ est une racine de $Q(X)$ alors $a = 1$ est aussi une racine de $S(X)$

1 ii) Verifiez que $Q'(X) = 2XS(X) + X^2 S'(X)$.

1 iii) On suppose que $a = 1$ est une racine de $Q(X)$. Montrez que si la multiplicité de la racine $a = 1$ de $Q(X)$ est plus grande ou égale à 2, alors la multiplicité de la racine $a = 1$ pour le polynôme $S(X)$ est aussi plus grande ou égale à 2.

1 iv) Montrez que si $(X-1)^2$ divise $Q(X)$ alors $(X-1)^2$ divise aussi $S(X)$.

1,5 (II.c) Montrez que si un polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ est divisible par X^2 et par $(X-1)^2$ alors il est aussi divisible par $X^2(X-1)^2$.

1,5 (II.d) En déduire, en expliquant votre raisonnement, que pour tout $P(X) \in \mathcal{E}$, il existe $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = P_3(X) + X^2(X-1)^2 S(X)$.

1 (II.e) Montrer que pour tout $P \in \mathcal{E}$, $\deg(P) \geq 3$.

4pts **Exercice III.** On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 11y' + 10y = te^{-t} + e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On considère l'équation homogène associée

$$(E_0) \quad y'' - 11y' + 10y = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

si aucune faute

et les équations

$$(E_1) \quad y'' - 11y' + 10y = te^{-t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

et

$$(E_2) \quad y'' - 11y' + 10y = e^{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

0,5 (1) Ecrire l'équation caractéristique associée à l'équation homogène (E_0).

1 (2) Résoudre l'équation homogène associée.

2,4 + 0,2 (3) (*Attention! Dans cette question, toute faute dans vos réponses donnera des points négatifs!*)

(QCM) Vrai ou faux?

+0,2 pour chaque bonne réponse

−0,2 pour chaque faute

la note finale de QCM = max{0, }

le nombre de points obtenus pour le QCM

a) On peut trouver une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation (E_1) en la cherchant sous la forme $y_1(t) = (a\,t + b)e^{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ des constantes inconnues. vrai

b) On peut trouver une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation (E_1) en la cherchant sous la forme $y_1(t) = ae^{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}$ une constante inconnue. faux

c) On peut trouver une solution particulière $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation (E_2) la cherchant sous la forme $y_2(t) = a\,te^{t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}$ une constante inconnue. vrai

d1) On peut trouver une solution particulière $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation (E_2) en la cherchant sous la forme $y_2(t) = (a\,t + b)e^{t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ des constantes inconnues. vrai

d2) On peut trouver une solution particulière $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation (E_2) en la cherchant sous la forme $y_2(t) = ae^{t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}$ une constante inconnue. faux

e) Si $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de (E_1) et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de (E_2), alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E). vrai

f) Si $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de (E) alors $y_1 - y_2$ est une solution de (E_1). faux

g) Si $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de (E) alors $y_1 - y_2$ est aussi une solution de (E). faux

h) Si $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de (E) alors $y_1 - y_2$ est une solution de (E_0). vrai

i) Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de (E) et $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de (E_0) alors $y + y_0$ est une solution de (E). vrai

j) Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de (E) et $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de (E_0) alors $y + 2y_0$ est une solution de (E). vrai

k) Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de (E) et $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de (E_0) alors $y_0 + 2y$ est une solution de (E) faux

Corrigé d'examen. Algèbre II, 15 mai 2023

Exercice 1

(1) $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A(1)$ a deux colonne identique (la 1-ière et la 3-ième) $\Rightarrow \det(A(1)) = 0$

$A(2)$ —— " —— (la 2-ieme et la 3-ième) $\Rightarrow \det(A(2)) = 0$

(2) $\operatorname{rang} A(1) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On soustrait ici la 1-iere colonne de la 3-ième colonne. C'est une operation élémentaire qui ne chanche pas de rang

$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

ici, on effectue l'operation élementaire $L_3 - L_2$. Cette opération ne change pas de rang

$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{L_2 - L_1}$

$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{L_3 - 2L_2}$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est echelonnée en lignes avec 2 pivots

donc $\operatorname{rang} A(1) = 2$.

De même $\operatorname{rang} A(2) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

la 3-ieme colonne – la 2-ième

$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{L_3 - L_2}$

$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A(2) = 2$

$\boxed{L_2 - L_1}$ $\boxed{L_3 - 2L_2}$

(1)

Corrigé d'examen. Algèbre II, 15 mai 2023

Exercice 1 (1) $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ a deux colonnes identiques $\Rightarrow \det A(1) = 0$

$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ a deux colonnes identiques $\Rightarrow \det A(2) = 0$

(2) $\operatorname{rang} A(1) \underset{L_3 - L_2}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 - L_1}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 - 2L_2}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes et a 2 pivots

de même

$\operatorname{rang} A(2) \underset{L_3 - L_2}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 - L_1}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\underset{L_3 - 2L_2}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

(3) Les matrices $A(1)$ et $A(2)$ ne sont pas inversible car $\det A(1) = 0$ et $\det A(2) = 0$ (Une autre explication: car $\operatorname{rang} A(1) < 3$ et $\operatorname{rang} A(2) < 3$) Rappelons qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rang} A = n$

(4) $\det A(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & x^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 3 & x^2-1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 3 & x^2-1 \end{pmatrix} =$

$= x^2 - 1 - 3(x-1) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

donc $\det A(x) = 0 \Longleftrightarrow (x = 1$ ou $x = 2)$

(5) D'après (4), $\det A(3) \neq 0$. Donc $\operatorname{rang} A(3) = 3$ (car $A(3) \in M_3(\mathbb{R})$)

(6) $A(3)$ est inversible car $\det A(3) \neq 0$.

Cherchons $A(3)^{-1}$: $A(3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_2 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = y_3 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3y_1 - \frac{5}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = -3y_1 + 4y_2 - y_3 \\ x_3 = y_1 - \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}(\mathcal{B}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$A^{-1}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(7) Les vecteur de la famille $\mathcal{B}$ sont les colonnes de la matrice $A_3 \in M_3(\mathbb{R})$. On a vu que rang $A(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Donc les vecteurs colonnes de $A(\mathcal{B})$ forment une base dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice II   I a) $P_3(x) + 2 = -2X^3 + 3X^2 = X^2(-2X+3)$

Donc X^2 divise $P_3(x) + 2$.

Montrons que $(X-1)^2$ divise le polynôme $P_3(x) + 1 = -2X^3 + 3X^2 - 1$

$$(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$$

Methode I : On pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} -2X^3 + 3X^2 + 0\cdot X - 1 & X^2 - 2X + 1 \\ \hline - \quad -2X^3 + 4X^2 - 2X & -2X - 1 \\ \hline -X^2 + 2X - 1 & \\ -X^2 + 2X - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $P_3(x) + 1 = (-2X-1)(X-1)^2$

$\Rightarrow (X-1)^2$ divise $P_3(x) + 1$.

Méthode II On pose $T(x) = P_3(x) + 1 = -2x^3 + 3x^2 - 1$

Alors $T(1) = -2 + 3 - 1 = 0$

$T'(x) = -6x^2 + 6x$ et $T'(1) = 0$

Donc $a = 1$ est une racine de la multiplicité ≥ 2 de polynôme $T(x) = P_3(x) + 1 \Rightarrow (x-1)^2$ divise $T(x) = P_3(x) + 1$.

(I.b) Si $Q(x)$ est divisible par $x^2(x-1)^2$ alors $\exists$ un polynôme $S_1(x)$ tel que $Q(x) = x^2(x-1)^2 S_1(x)$. Donc

$$P_3(x) + Q(x) + 2 = P_3(x) + 2 + Q(x) = -2x^3 + 3x^2 + x^2(x-1)^2 S_1(x) =$$

$$= x^2\left(-2x + 3 + (x-1)^2 S_1(x)\right)$$

$\Rightarrow$ $\underline{x^2 \text{ divise } P_3 + Q(x) + 2}$

Montrons que $(x-1)^2$ divise $P_3(x) + Q(x) + 1$.

On sait que $(x-1)^2$ divise $P_3(x) + 1$. Donc $\exists$ un polynôme $S_2(x)$ tel que $P_3(x) + 1 = (x-1)^2 S_2(x)$

(Remarque : avec la méthode I pour la question (I.a) on a $S_2(x) = -2x - 1$)

Donc $P_3(x) + Q(x) + 1 = P_3(x) + 1 + Q(x) = (x-1)^2 S_2(x) + (x-1)^2 x^2 S_1(x)$

$$= (x-1)^2\left(S_2(x) + x^2 S_1(x)\right)$$

$\Rightarrow$ $\underline{(x-1)^2 \text{ divise } P_3(x) + Q(x) + 1}$

On a montré que x^2 divise $P_3(x) + Q(x) + 2$ et que $(x-1)^2$ divise $P_3(x) + Q(x) + 1$. Donc par la définition de $\mathcal{E}$, $P_3(x) + Q(x) \in \mathcal{E}$.

(I.c) D'après (I.b) $P_3(x) + x^2(x-1)^2 \in \mathcal{E}$.

et $\deg\left(P_3(x) + x^2(x-1)^2\right) = 4$ car $\deg P_3(x) = 3$ et $\deg\left(x^2(x-1)^2\right) = 4$.

(I.d) Pour $n=3$, on a $P_3(x) \in \mathcal{E}$ et $\deg P_3(x) = 3$

Pour $n=4$, on a $P_4(x) = P_3(x) + x^2(x-1)^2 \in \mathcal{E}$

et $\deg P_4(x) = 4$.

Pour $n \geq 4$, d'après (I.b), $P_n(x) = P_3(x) + x^2(x-1)^2 x^{n-4} \in \mathcal{E}$

et $\deg P_n = n$ car $\deg P_3(x) = 3$ et

$\deg\left(x^2(x-1)^2 x^{n-4}\right) = n$.

(II.a) Si $P(x), \tilde{P}(x) \in \mathcal{E}$ alors

x^2 divise $P(x)+2$ et aussi $\tilde{P}(x)+2$

$\Rightarrow \exists$ deux polynômes $S(x)$ et $\tilde{S}(x)$ tels que

$P(x)+2 = x^2 S(x)$ et $\tilde{P}(x)+2 = x^2\tilde{S}(x)$

$\Rightarrow P(x) - \tilde{P}(x) = P(x)+2 - \left(\tilde{P}(x)+2\right) = x^2\left(S(x) - \tilde{S}(x)\right)$

$\Rightarrow x^2$ divise $P(x) - \tilde{P}(x)$.

De même, $(x-1)^2$ divise $P(x)+1$ et aussi $\tilde{P}(x)+1$

$\Rightarrow \exists$ deux polynômes $T(x)$ et $\tilde{T}(x)$ tels que

$P(x)+1 = (x-1)^2 T(x)$ et $\tilde{P}(x)+1 = (x-1)^2\tilde{T}(x)$

$\Rightarrow P(x) - \tilde{P}(x) = (x-1)^2\left(T(x) - \tilde{T}(x)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (X-1)^2$ divise $P(X) - \tilde{P}(X)$.

(II.b) On a $Q(X) = X^2 S(X)$.

i) Si $a=1$ est une racine de $Q(X)$ alors $Q(1)=0$. Or $Q(1) = S(1)$ et donc, dans ce cas, on a aussi $S(1) = 0 \Rightarrow a=1$ est racine de $S(X)$.

ii) $Q'(X) = (X^2)' S(X) + X^2 S'(X) = 2X\, S(X) + X^2 S'(X)$.

iii) Si $a=1$ est une racine de la multiplicité ≥ 2 de $Q(X)$ alors $Q(1) = Q'(1) = 0 \Rightarrow S(1) = 0$ et d'apres ii) $2S(1) + S'(1) = 0$
$\Rightarrow S(1) = S'(1) = 0 \Rightarrow a=1$ est une racine de la multiplicité ≥ 2 de $S(X)$.

iv) Si $(X-1)^2$ divise $Q(X)$ alors $a=1$ est une racine de la multiplicité ≥ 2 de $Q(X)$ $\Rightarrow$ (d'apres iii)) c'est aussi une racine de la multiplicité ≥ 2 de $S(X)$ $\Rightarrow (X-1)^2$ divise $S(X)$.

(II.c) Si $Q(X)$ est divisible par X^2 alors $\exists$ un polynôme $S(X)$ tel que $Q(X) = X^2 S(X)$. Si en plus $Q(X)$ est divisible par $(X-1)^2$ alors d'apres iv) de (II.b), $S(X)$ est aussi divisible par $(X-1)^2$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ un polynôme $T(X)$ tel que $S(X) = (X-1)^2 T(X)$, et donc
$Q(X) = X^2 (X-1)^2 T(X) \Rightarrow Q(X)$ est divisible par $X^2(X-1)^2$.

(II.d) Soit $P(X) \in E$. On sait que $P_3(X) \in S$. Donc, d'apres (II.a), $P(X) - P_3(X)$ est divisible par X^2 et aussi par $(X-1)^2$ $\Rightarrow$ (d'apres (II.c)) $P(X) - P_3(X)$ est divisible par $X^2(X-1)^2$ $\Rightarrow \exists$ un polynôme $S(X)$ tel que $P(X) - P_3(X) = X^2(X-1)^2 S(X)$

c.à.d $P(X) = P_3(X) + X^2(X-1)^2 S(X)$

(II-e) Soit $P(x) \in \mathcal{E}$. Alors d'après (II.d) $\exists$ un polynôme $S(x)$ tel que $P(x) = P_3(x) + x^2(x-1)^2 S(x)$

Si $S(x) = 0$, alors $P(x) = P_3(x)$ et $\deg P(x) = \deg P_3(x) = 3$

Si $S(x) \neq 0$, alors $\deg S(x) \geq 0$ et

$$\deg\left(x^2(x-1)^2 S(x)\right) = \deg\left(x^2(x-1)^2\right) + \deg S(x) = 4 + \deg(S(x)) \geq 4.$$

Exercice III

(E_0) $y'' - 11y' + 10y = 0$, $t \in \mathbb{R}$

(1) (e.c) $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$

$$\Delta = 121 - 40 = 81, \quad \sqrt{\Delta} = 9$$

$$\lambda_1 = \frac{11-9}{2} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{11+9}{2} = 10$$

(2) On a $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Donc d'après le cours, l'ensemble de toutes les solutions de (E_0) à valeurs dans $\mathbb{R}$ est

$$\left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; : \; y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{10t}, \; \forall t \in \mathbb{R} \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

et l'ensemble de toutes les solutions de (E_0) à valeurs dans $\mathbb{C}$ est

$$\left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \; : \; y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{10t}, \; \forall t \in \mathbb{R} \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\}$$