CY Université - L1 MIPI, Algèbre 2, Examen de session 2
21 juin 2022

Exercice I On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 6y' + 9y = t + e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(1) Trouver l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène

$$(E_0) \quad y'' - 6y' + 9y = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation (E_0) est-il un espace vectoriel? Si oui, de quelle dimension?

(2) Trouvez une solution particulière y_1 de l'équation

$$(E_1) \quad y'' - 6y' + 9y = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(3) Trouvez une solution particulière y_2 de l'équation

$$(E_2) \quad y'' - 6y' + 9y = e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(4) Trouvez une solution particulière de l'équation (E).
(5) Trouver l'ensemble des solutions réelles de l'équation (E).
(6) Trouver une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

Exercice II. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Calculez le déterminant et le rang de la matrice A et de la matrice B.
(2) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par des vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$?
(3) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par des vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$?
(4) Calculer la comatrice de la matrice A et la comatrice de la matrice B.
(5) Montrez que la matrice B est inversible et que la matrice A ne l'est pas. Calculer la matrice inverse B^{-1} de B.

Exercice III.

(1) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, P' le polynôme dérivé de P et R le reste de la division euclidienne de P par P'. Montrer que si α est une racine de la multiplicité $p \geq 2$ de P, alors $R(\alpha) = 0$.
(2) Soit $P = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 8X + 8$
  a) Calculer P' et montrer que le reste de la division euclidienne de P par P' est $R = 3X + 6$
  b) Trouver la racine α^* de R et montrer qu'elle est aussi une racine de P et de P'.
  c) Quel est l'ordre de la multiplicité de la racine α^* pour le polynôme P?
  d) Effectuer la division euclidienne de P par $(X - \alpha^*)^2$ et en déduire la décomposition de P en produit des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.