Corrigé de l'examen d'Algèbre 2, 16. 05. 2022

Exercice 1 1) $\forall\, t \in J =]0,+\infty[$, $F'(t) = -\ln(t) - t\cdot\frac{1}{t} + 1 = -\ln(t) = f(t)$
et donc F est une primitive de la fonction $f : J \to \mathbb{R}$ sur J.

2) l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \ln(t)\, y = 0$ sur J est l'ensemble de toutes les fonctions $y : J \to \mathbb{R}$ de la forme

$$y(t) = C e^{-F(t)} = C e^{t\ln t - t}, \quad t \in J$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

3) Pour trouver une solution particulière $y_p : J \to \mathbb{R}$ de l'équation
$y' - \ln(t)\, y = e^{t\ln(t)}$, $t \in J$
on utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche $y_p : J \to \mathbb{R}$ sous la forme $y_p(t) = K(t) e^{t\ln(t) - t}$, $t \in J$,
où $K : J \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur J.
Pour une telle fonction

$$y_p' - \ln(t)\, y_p = K'(t) e^{t\ln(t) - t} \quad \text{et donc} \quad y_p' - \ln(t) y_p = e^{t\ln t} \ \forall\, t \in J \iff$$

$$\iff K'(t) e^{-t} = 1 \ \forall\, t \in J \iff K'(t) = e^{t} \quad \forall\, t \in J.$$

Il suffit donc prendre à la place de K l'une des primitives de la fonction exponentielle $k(t) = e^t$, $t \in J$ sur J.
On peut choisir $K(t) = e^t$, $\forall\, t \in J$.
On obtient donc $y_p(t) = e^t \cdot e^{t\ln(t) - t} = e^{t\ln t}$, $t \in J$.

4) L'ensemble des solutions de l'équation $y' - \ln(t) y = e^{t\ln(t)}$ sur $J =]0,+\infty[$ est l'ensemble de toutes les fonctions $y : J \to \mathbb{R}$ de la forme

$$y(t) = y_p(t) + C e^{t\ln(t) - t} = e^{t\ln t}\left(1 + C e^{-t}\right), \quad \forall\, t \in J$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 1) On résout d'abord l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \iff \lambda = \lambda_1 = 2 \text{ ou } \lambda = \lambda_2 = 4$$

On a $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Donc l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène (E_0) est l'ensemble de toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$, $t \in \mathbb{R}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

2) Pour trouver une solution particulière y_1 de l'équation (E_1) on remarque que sa partie droite est de la forme $p(t)e^{\mu t}$ avec une fonction polynomiale $p(t) = p$, $t \in \mathbb{R}$, et $\mu = 0$. Étant donné que $\mu \neq \lambda_i$, $\forall i = 1, 2$, on cherche y_1 sous la forme $y_1(t) = q(t)e^{\mu t} = q(t)$, $t \in \mathbb{R}$ avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale du même degré que $p(t)$:

$$q(t) = at + b, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Pour une telle fonction, $y_1'(t) = a$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et $y_1'' = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
Donc

$$y_1'' - 6y_1' + 8y_1 = -6a + 8at + 8b = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \quad a = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad b = \frac{3}{4}a = \frac{3}{32}$$

Donc $\quad y_1(t) = \frac{1}{8}t + \frac{3}{32} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

3) Pour trouver y_2, on remarque que la partie droite de (E_2) est de la forme $p(t)e^{\mu t}$ avec une fonction polynomiale $p(t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\mu = 2 = \lambda_1 \neq \lambda_2$. On cherche donc y_2 sous la forme $y_2(t) = q(t)e^{2t}$ avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré $\deg p + 1$. Étant donné que $\deg p = 0$, on a donc $q(t) = At + B$, $t \in \mathbb{R}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ des coefficient à trouver. Pour une telle fonction $y_2(t) = (At + B)e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, on a $y_2'(t) = Ae^{2t} + 2(At+B)e^{2t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, et
$y_2''(t) = 4Ae^{2t} + 4(At+B)e^{2t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Donc

$$y_2''(t) - 6y_2'(t) + 8y_2(t) = 4Ae^{2t} + \cancel{4(At+B)e^{2t}} - 6Ae^{2t} - \cancel{12(At+B)e^{2t}} + \cancel{8(At+B)e^{2t}} =$$

$$= -2Ae^{2t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et donc $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie (E_2) $\iff$ $-2Ae^{2t} = e^{2t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\iff$ $A = -\frac{1}{2}$.
On trouve donc $y_2(t) = -\frac{1}{2}te^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$ (la constante B peut être arbitraire)

4) D'après le principe de la superposition, on trouve une solution particulière de (E) :

$$y_p(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{8}t + \frac{3}{32} - \frac{1}{2}te^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5) et 6) L'ensemble des solutions réelles de (E) est l'ensemble de toutes les fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $y(t) = y_p(t) + C_1e^{2t} + C_2e^{4t} = \frac{1}{8}t + \frac{3}{32} - \frac{1}{2}te^{2t} + C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Cet ensemble n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas 0 (on peut aussi montrer qu'il n'est pas stable ni par les additions ni par les multiplications par des scalaires).

Exercice 3   1) On applique les opérations élémentaires

$$\det\begin{pmatrix}-2&1&2\\0&2&3\\4&2&1\end{pmatrix} \underset{L_3\to L_3+2L_1}{=} \det\begin{pmatrix}-2&1&2\\0&2&3\\0&4&5\end{pmatrix} \underset{L_3\to L_3-2L_2}{=} \det\begin{pmatrix}-2&1&2\\0&2&3\\0&0&-1\end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Etant donné que $A \in M_3(\mathbb{R})$ et que $\det(A)\neq 0$, on déduit que $\operatorname{rang}(A)=3$.

$$\det\begin{pmatrix}0&2&4\\2&0&1\\2&1&3\end{pmatrix} \underset{L_3\to L_3-L_2}{=} \det\begin{pmatrix}0&2&4\\2&0&1\\0&1&2\end{pmatrix} \underset{L_1\to L_1-L_3}{=} \det\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&1\\0&1&2\end{pmatrix} = 0$$ car la première ligne est nulle.

et étant donné que les opération élémentaires ne change pas le rang de la matrice, on obtient

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}0&2&4\\2&0&1\\2&1&3\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&1\\0&1&2\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}\boxed{2}&0&1\\0&\boxed{1}&2\\0&0&0\end{pmatrix} = 2,$$ car on a une matrice echelonné par la droite avec 2 pivots.

2) et 3) Pour une matrice, la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs collonnes est égal à son rang. Donc, d'apres 1), l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ est de dimension 3, et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ est de dimension 2.

4) Etant donné qu'on a trois vecteurs $e_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, pour montrer qu'ils forment une base dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la famille (e_1,e_2,e_3) est génératrice dans $\mathbb{R}^3$. D'apres la question précédante,

$\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1,e_2,e_3)$ est un sous-espace vect. de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3

$\Rightarrow \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1,e_2,e_3)=\mathbb{R}^3$ (car $\dim\mathbb{R}^3=\dim\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3)$)

$\Rightarrow$ la famille (e_1,e_2,e_3) est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

La famille $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ ne forme pas de base dans $\mathbb{R}^3$ car d'apres la question précédante, $\dim\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right)=2<3=\dim\mathbb{R}^3$

(cette famille n'est pas génératrice dans $\mathbb{R}^3$).

5) La matrice A est inversible car $\det(A)\neq 0$.

La matrice B n'est pas inversible car $\det(B)=0$.

Pour trouver A^{-1}, on résous le système

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_2 + 3x_3 = y_2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = y_1 - y_2 \\ 2x_2 + 3x_3 = y_2 \\ 4x_2 + 5x_3 = 2y_1 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = y_2 - y_1 \\ 2x_2 + 3x_3 = y_2 \\ -x_3 = 2y_1 + y_3 - 2y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 = -2y_1 + \frac{3}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = 3y_1 - \frac{5}{2}y_2 + \frac{3}{2}y_3 \\ x_3 = -2y_1 + 2y_2 - y_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Donc
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

a) $P(-1) = (-1)^4 + 2\cdot(-1)^3 + 2(-1)^2 + 2\cdot(-1) + 1$
$= 0$

Donc $a = -1$ est une racine de P.

Pour trouver l'ordre de sa multiplicité, on commence par calculer $P'(-1)$:

$P'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$, $P'(-1) = -4 + 6 - 4 + 2 = 0$

Etant donné que $P'(-1) = 0$, on cherche $P''(-1)$:

$P''(x) = 12x^2 + 12x + 4$, $P''(-1) = 12 - 12 + 4 = 4 \neq 0$

On a $P(-1) = P'(-1) = 0 \neq P''(-1)$. Donc l'ordre de la multiplicité de la racine $a = -1$ est 2.

b)

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & x^2 + 2x + 1 \\
\cline{2-2}
-\left(x^4 + 2x^3 + x^2\right) & x^2 + 1 \\
\cline{1-1}
x^2 + 2x + 1 & \\
-\left(x^2 + 2x + 1\right) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

c)

Donc $P = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1) = (x+1)^2(x^2+1)$

Le polynome $(x+1)$ est irreductible dans $\mathbb{R}[x]$ car il est de degré 1, et le polynome x^2+1 est irreductible dans $\mathbb{R}[x]$ car il est de degré 2 avec les racine complexes :

$$x^2 + 1 = 0 \iff x = \pm i.$$

(c'est un polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$)