CY Université - L1 MIPI, Algèbre 2, Examen, 16 mai 2022

Exercice I. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 6y' + 9y = t + e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(1) Trouver l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène

$$(E_0) \quad y'' - 6y' + 9y = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation (E_0) est-il un espace vectoriel? Si oui, de quelle dimension?

(2) Trouvez une solution particulière y_1 de l'équation

$$(E_1) \quad y'' - 6y' + 9y = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(3) Trouvez une solution particulière y_2 de l'équation

$$(E_2) \quad y'' - 6y' + 9y = e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(4) Trouvez une solution particulière de l'équation (E).

(5) Trouver l'ensemble des solutions réelles de l'équation (E).

Exercice III. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Calculez le déterminant et le rang de la matrice A et de la matrice B.

(2) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par des vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(3) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par des vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$?

(4) Les vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-ils une base dans $\mathbb{R}^3$? Pourquoi? Mêmes questions pour les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(5) Montrez que la matrice A est inversible et que la matrice B ne l'est pas. Calculer la matrice inverse A^{-1} de A.

Exercice IV. Soit $P = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

a) Montrez que $a = -1$ est une racine de P et trouver l'ordre de sa multiplicité.

b) Effectuez la division euclidienne de P par $Q = X^2 + 2X + 1$.

c) En déduire la décomposition du polynôme P en produit des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$. Justifiez votre réponse.