CY Université - L1 MIPI, Algèbre 2, Contrôle continu final

3,5 pts **Exercice I.** Soient $J =]-\pi/2, \pi/2[$, et $F, f : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies par

$$f(t) = \tan(t) \quad \text{et} \quad F(t) = -\ln(\cos(t)), \quad \forall t \in J.$$

(1) Justifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur J. 0,5 pts

(2) Résoudre l'équation différentielle $y' + \tan(t)y = \cos(t)$ sur $J =]-\pi/2, \pi/2[$. ← { 1 pt pour E_0 ; 1,5 pts pour y_p ; 0,5 pour y

6,5 pts **Exercice II.** On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 2y' + y = e^{-t} + e^{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(1) Résoudre l'équation homogène associée 1,5 pts → { 0,5 pour la resolution de (ec) ; 1 pour S_0

$$(E_0) \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(2) Trouver une solution particulière de l'équation 2 pts → { 1 pour la forme $y = (At^2+Bt+c)e^t$; 0,5 pour $B = C = 0$; 0,5 pour $A = \frac{1}{2}$

$$(E_1) \quad y'' - 2y' + y = e^{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(3) Trouver une solution particulière de l'équation { 1 pour la forme $y_2 = ae^{-t}$; 0,5 pour $a = \frac{1}{4}$

$$(E_2) \quad y'' - 2y' + y = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$ 1,5 pts →

(4) En déduire une solution particulière de l'équation (E). 1 pts

(5) Résoudre l'équation (E). 0,5 pts

3 pts **Exercice III.** Soit $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 4$.

a) Montrer que $a = 2$ est une racine double de P. 1,5 pts { 0,5 pt pour la méthode ; + 1 pt pour l'application de la méthode

b) Décomposer le polynôme P en produit des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$. 1,5 pts (dont 0,5 pts pour la division euclidienne)

11 pts **Exercice IV.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 pts (1) Calculer le determinant de la matrice A. Quel est le rang de la matrice A? Est elle inversible? Pourquoi? (1 pour det A + 0,5 pour rg A + 0,5 pour l'inversibilité de A)

1 pt (2) Montrer que la famille des vecteurs

$$\mathcal{B}' = \left(e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

1 pt → (3) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

2 pts → (4) Trouver la matrice de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. (1 pt pour $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et 1 pt pour le calcul)

(5) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de representation dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

2 pts (donc 1 pt pour la formule de changement de base)

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de representation de f est

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1 pt → (6) On considère des endomorphismes $f^n, n \in \mathbb{N}^*$, définis par $f^1 = f$ et $f^{n+1} = f \circ f^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la matrice de representation de f^n dans la base $\mathcal{B}'$.

2 pts (7) Calculer le matrice de representation de f^n dans la base canonique $\mathcal{B}$.

(dont 1 pt pour la formul de changement de base)

Corrigé

Exercice 1 1) $F(t) = u \circ v(t)$ avec $v(t) = \cos(t)$, $v :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to]0,1[$

et $u(x) = -\ln x$, $u :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

$F'(t) = v'(t)\, u' \circ v(t)$ avec $v'(t) = -\sin(t)$ et $u'(x) = -\frac{1}{x}$. Donc

$F'(t) = -\sin(t) \cdot \frac{-1}{\cos(t)} = \tan(t) = f(t)$ $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\Rightarrow$ F est une primitive de f sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2) <u>Resolution de l'equation homogène associée:</u> (E_0) $y' + \tan(x)\, y = 0$

D'après le théorème du cours, l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$S_0 = \{ y :]-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} : y(t) = Ce^{-F(t)}, \forall t \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\mid C \in \mathbb{R} \}$$

avec $F(t)$ une primitive de la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \tan(t), \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On a donc

$$S_0 = \{ y :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} : y(t) = Ce^{\ln\cos(t)} = C\cos(t), \forall t \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\mid C \in \mathbb{R} \}$$

<u>Cherchons une solution particulière de l'equation</u>

$$(E) \quad y' + \tan(t)\, y = \cos(t), \quad t \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[$$

sous la forme $y_p(t) = C(t)\cos(t), \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, (on applique la methode de la variation de la constante)

$y_p'(t) + \tan(t)\, y_p(t) = C'(t)\cos(t)$ $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a donc

$y_p'(t) + \tan(t)\, y_p(t) = \cos(t), \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\Leftrightarrow$ $C'(t) = 1$

$\Leftrightarrow$ $C'(t)\cos(t) = \cos(t)$, $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $C'(t) = 1$ $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\Leftrightarrow$

$C(t) = t + K$ $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ avec $K \in \mathbb{R}$

On peut prendre $C(t) = t$ $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\Rightarrow$

$y_p(t) = t\cos(t)$ $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

<u>On deduit l'ensemble des solutions de (E)</u> :

$$S = \{ y :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} : y(t) = t\cos(t) + C\cos(t) \ \forall t \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\mid C \in \mathbb{R} \}$$

Exercice 2 (E) $y'' - 2y' + y = e^t + e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$

1) <u>Resolution de (E_0)</u> $y'' - 2y' + y = 0$:

équation caracteristique $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ a une racine double $\lambda = 1$ $(\Delta = 4 - 4 = 0)$

$\Rightarrow$ l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$S_0 = \{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y(t) = (C_1 + tC_2)e^t \ \forall t \in \mathbb{R} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

2) Cherchons une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E_1) $y'' - 2y' + y = e^t$.

On a une equation de la forme $y'' - 2y' + y = P(t)e^{\mu t}$ avec $P = 1$ un polynôme de degrè 0 et $\mu = 1$ la racine double de l'equation caractéristique.

② Donc, d'après le cours, il y a une solution particulière de (E_1) $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $y_1(t) = Q(t)\, e^{\mu t} = Q(t)\, e^{t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, avec Q un polynome de degré $\deg Q = \deg P + 2 = 0 + 2 = 2$.
On peut donc chercher une solution y_1 de (E_1) sous la forme

$$y_1(t) = (At^2 + Bt + C)\, e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De plus $\forall B, C \in \mathbb{R}$ la fonction $y_0(t) = (Bt + C)e^t$ est une solution de l'équation homogène associée (E_0) $y'' - 2y' + y = 0$ et donc d'après le principe de la superposition, si $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definie par $y_1(t) = (At^2 + Bt + C)e^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, est une solution de (E_1) alors $\tilde{y}_1 = y_1 - y_0$ est aussi une solution de (E_1).

On peut donc chercher une solution particulière de (E_1) sous la forme

$$y_1(t) = At^2 e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour une telle fonction, on a $y_1'(t) = 2Ate^t + At^2e^t$ et

$$y_1''(t) = 2Ae^t + 4Ate^t + At^2e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et

$$y_1''(t) - 2y_1'(t) + y_1(t) = (\cancel{At^2} + \cancel{4At} + 2A - \cancel{4At} - \cancel{2At^2} + \cancel{At^2})e^t = 2A\, e^t, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Donc une telle fonction y_1 vérifie $(E_1) \iff 2A = 1 \iff A = \frac{1}{2}$

$\iff$ $\boxed{y_1(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t, \ \forall t \in \mathbb{R}}$.

3) Cherchons une solution particulière $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation

$$(E_2) \quad y'' - 2y' + y = e^{-t}.$$

Nous avons une équation de la forme $y'' - 2y' + y = P(t)e^{\mu t}$ avec $P(t) = 1$ une fonction polynomiale de degré 0 et $\mu = -1 \neq \lambda = 1$ (où $\lambda = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique). Donc, d'après le cours, il y a une solution particulière $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $y_2(t) = Q(t)\, e^{\mu t} = Q(t)\, e^{-t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, avec Q un polynome de degré $\deg Q = \deg P = 0$. On peut donc chercher une solution particulière de (E_2) sous la forme $y_2(t) = a e^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Pour une telle fonction,

$$y_2'' - 2y_2' + y_2 = ae^{-t} + 2ae^{-t} + ae^{-t} = 4ae^{-t} \text{ et donc}$$

y_2 vérifie $(E_2) \iff 4a = 1 \iff a = \frac{1}{4} \iff \boxed{y_2(t) = \frac{1}{4} e^{-t}, \ \forall t \in \mathbb{R}}$

4) Cherchons une solution particulière y_p de (E). Nous avons trouvé une solution particulière y_1 de (E_1) $y'' - 2y' + y = e^t$, $t \in \mathbb{R}$, et une solution particulière

y_2 de (E_2) $y'' - 2y' + y = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.
D'après le principe de la superposition, $y_P = y_1 + y_2$ est donc une solution particulière de (E) $y'' - 2y' + y = e^t + e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \boxed{y_P(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t + \frac{1}{4}e^{-t}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}}$$

5) Nous avons trouvé l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (E_0) $y'' - 2y' + y = 0$

$$S_0 = \{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ y(t) = (C_1 + C_2 t)e^t, \forall\, t \in \mathbb{R} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

et une solution particulière y_P de (E). Donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ y(t) = y_P(t) + (C_1 + C_2 t)e^t, \forall\, t \in \mathbb{R} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \boxed{\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ y(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + (C_1 + C_2 t)e^t, \forall\, t \in \mathbb{R} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}}$$

Exercice 3 $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 4$

1) $a = 2$ est une racine double de $P \Leftrightarrow P(2) = P'(2) = 0$ et $P''(2) \neq 0$.

$P' = 4X^3 - 12X^2 + 10X - 4$, $P'' = 12X^2 - 24X + 10$

$P(2) = 16 - 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4 = 16 - 32 + 20 - 8 + 4 = 40 - 40 = 0$

$P'(2) = 4 \cdot 8 - 12 \cdot 4 + 10 \cdot 2 - 4 = 32 - 48 + 20 - 4 = 52 - 52 = 0$

$P''(2) = 12 \cdot 4 - 24 \cdot 2 + 10 = 10 \neq 0$

Donc $a = 2$ est une racine double de P.

2) On sait que $a = 2$ est une racine double de P. Donc $(X-2)^2 = X^2 - 4X + 4$ divise P. On effectue la division euclidienne de P par $X^2 - 4X + 4$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 4 & X^2 - 4X + 4 \\ \cline{2-2} -(X^4 - 4X^3 + 4X^2) \quad\quad\quad\quad & X^2 + 1 \\ \hline X^2 - 4X + 4 & \\ -(X^2 - 4X + 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On a donc $P = (X^2 - 4X + 4)(X^2 + 1) = (X-2)^2(X^2+1)$

Le polynôme $X - 2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ car $\deg(X-2) = 1$ et le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ car il n'a pas de racines réelles $(\Delta = 0^2 - 4 = -4 < 0)$. Donc $\boxed{P = (X-2)^2(X^2+1)}$ est la décomposition de P en produit des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (on remplace L_1 par $L_1 + L_3$)

$= (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (developpment le long de la 1-iere colonne)

$= 2 - 4 = \underline{-2}$

Etant donné que $A \in M_3(\mathbb{R})$ et que $\det(A) \neq 0$, on deduit que $\underline{rg(A) = 3}$ et que $\underline{A \text{ est inversible}}$.

2) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1', e_2', e_3') = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det A = -2 \neq 0$$

et donc la famille des vecteurs $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base dans $\mathbb{R}^3$.

3) La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est constituée des colonnes des coordonnées des vecteurs e_1', e_2', e_3' dans la base $\mathcal{B}$. On a donc

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

4)

$$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = A^{-1}$$

Pour trouver la matrice A^{-1} on resout le système

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ 2x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = y_3 - y_1 \\ 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 2x_2 + 2x_3 = y_1 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ 2x_2 + x_3 = y_2 \\ x_3 = y_1 + y_3 - y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_2 - x_3) = -\frac{1}{2} y_1 + y_2 - \frac{1}{2} y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) D'après le théorème de changement de base

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) \cdot P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6) On sait que pour deux endomorphismes $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f \circ g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(g).$$

On a donc $\forall n$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f^{n+1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f \circ f^n) =$$

$$= \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f^n)$$

et donc, par recurrence, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f^n) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f)\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n =$

$$= \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

7) D'après le théorème de changement de bases,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f^n) = P^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f^n)\ P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f)\ P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{(-1)^n}{2} & (-1)^n & -\frac{(-1)^n}{2} \\ 2^n & -2^n & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2^n - \frac{(-1)^n}{2} & -2^n + (-1)^n & -\frac{1+(-1)^n}{2} + 2^n \\ 2^n - (-1)^n & -2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - \frac{1+(-1)^n}{2} & -2^n + (-1)^n & 2^n + \frac{1-(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$