Université de Cergy-Pontoise **2015-2016**
L1 Biologie

Examen Final : Mathématiques

Durée : 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer.

Exercice 1 Etude d'une fonction (5pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$$

1)(2pts) Recherche d'une asymptote.
a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \dfrac{x-2}{x^2+1}$.
b) En déduire que la courbe représentative de f, $\mathbb{C}_f$ admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.
c) Préciser la position de la courbe $\mathbb{C}_f$ par rapport à son asymptote.
2)(2pts) Etude des variations de f.
a) Après avoir justifié que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$$

b) En déduire le sens de variation de f.
c) Donner le tableau de variation de f en précisant les limites et valeurs particulières.

3)(1pt) Dessiner le graphe de f avec son asymptote sur l'intervalle $]-5,5[$.
Remarque : $\sqrt[3]{2} \simeq 1,26$.

Exercice 2 Une bijection (6pts)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \quad (2.1)$$

1)(1pt) Etude de la parité.
a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})} \quad (2.2)$$

b) Après avoir simplifié cette dernière expression, conclure si g est paire ou impaire.
2)(1pt) Limites aux bornes.
a) Calculer la limite de g en $-\infty$ (on utilisera l'expression (2.1) de g).
b) Sans calcul, en déduire la limite de g en $+\infty$ en utilisant les questions précédentes.

3)(1,5pt) Etude des variations de g.

a) Après avoir justifié que g est dérivable montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ que l'on précisera telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{\alpha e^x}{(e^x+1)^2}$$

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Montrer que g définit une bijection de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un intervalle I que l'on précisera. On note g^{-1} la réciproque ainsi définie sur I.

4)(1pt) Une autre expression de g'.

a) Montrer qu'il existe une constante β telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - g^2(x) = \frac{\beta e^x}{(e^x+1)^2}$$

b) En déduire une relation entre $g'(x)$ et $(1 - g^2(x))$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5)(1,5pt) Etude de la dérivabilité de g^{-1}.

a) En utilisant un théorème du cours, justifier que g^{-1} est dérivable sur I.

b) En utilisant un résultat du cours, rappeler la relation entre $(g^{-1})'(y)$ et $g'(g^{-1}(y))$.

c) En déduire qu'il existe une constante γ que l'on précisera telle que

$$\forall y \in I, \quad (g^{-1})'(y) = \frac{\gamma}{1-y^2}.$$

Exercice 3 Probabilité (5pts)

En 2013 en France métropolitaine, il a été constaté que 80% des malades victimes de la grippe ont présenté dans les premiers jours de la maladie une fièvre supérieure à 39°. Il a été constaté que cette même année seulement 10% de la population a présenté ce symptôme mais que 75% des personnes présentant une fièvre supérieure à 39° avait la grippe.

1)(2pts) Traduire en langage mathématiques les données de l'énoncé.

2)(1,5pt) Quel était le pourcentage de personnes atteintes par la grippe cette année là.
Pour les calculs on pourra noter que $0,75 = \frac{3}{4}$, $0,8 = \frac{4}{5}$ et enfin que $\frac{15}{16} = 0,9375$.

3) (1,5pts) Quel était le pourcentage parmis les personnes n'ayant pas la grippe qui présentaient ce symptôme.
Pour les calculs, on pourra utiliser que $\dfrac{0,25}{0,90625} \simeq 0,276$.

Exercice 4 Statistiques descriptives (4pts)

Sur une classe de 25 élèves de CE2, on a relevé les notes suivantes à une évaluation de français notée sur 5.

Notes	0	1	2	3	4	5
Effectif	1	1	6	4	8	5

1)(0,5pt) Faire une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons.

2) (2pts) Calculer les fréquences et les fréquences cumulées.
Pour les calculs, on rappelle que $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$.

3) (1,5pts) Donner les quartiles de cette série statistique. Donner une représentation dans une boite à moustache.