Université de Cergy-Pontoise **2015-2016**
L1 Biologie

Examen Final : Mathématiques

Éléments de corrections

En italique vous trouverez des remarques liées à des erreurs observées dans les copies.

Exercice 1 Etude d'une fonction (5pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$$

1)(2pts) Recherche d'une asymptote.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en mettant au même dénominateur on a

$$\begin{aligned} x - \frac{x-2}{x^2+1} &= \frac{x(x^2+1)-(x-2)}{x^2+1} \\ &= \frac{x^3+x-x+2}{x^2+1} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité demandée.

Pour la rédaction, il est naturel de partir de l'expression proposée. Au moment de faire la vérification, on ne peut pas encore écrire $f(x) = x - \dfrac{x-2}{x^2+1}$ *puisque c'est ce que l'on veut montrer.*
Attention à ne pas confondre le symbole mathématique d'égalité "=" avec le symbole $\Leftrightarrow$ *qui veut dire que des propositions mathématiques sont équivallentes.*

b) *Quand il est demandé de vérifier qu'une droite d'équation* $y = ax + b$ *est asymptote à une courbe en* $+\infty$ *(ou* $-\infty$*), il suffit de vérifier que la limite de* $f(x) - (ax + b)$ *est nulle en* $+\infty$ *(ou* $-\infty$*). C'est la définition d'une asymptote.*
On veut donc étudier la limite de $f(x)-x$ en $+\infty$ (ou $-\infty$). Or d'après l'expression précédente $f(x) - x = -\dfrac{x-2}{x^2+1}$. On remarque que $\dfrac{x-2}{x^2+1} = \dfrac{x}{x^2}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$ et donc

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{x-2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x-2}{x^2+1} = 0.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est bien asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) La position de la courbe $\mathbb{C}_f$ par rapport à son asymptote est donné par le signe de $f(x) - x = -\dfrac{x-2}{x^2+1}$. Donc $\mathbb{C}_f$ est au dessus de son asymptote si $x \leq 2$ et en-dessous si $x \geq 2$.

2)(2pts) Etude des variations de f.

a) f est le rapport de deux fonctions polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas, f

est donc bien dérivable. Selon les formules de dérivation d'un rapport de deux fonctions

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 - 4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^4 + 3x^2 - 4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x(x^3 + 3x - 4)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (x-1)(x^2+x+4) &= (x^3 + x^2 + 4x) - (x^2 + x + 4) \\ &= x^3 + 3x - 4 \end{aligned}$$

on en déduit bien que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

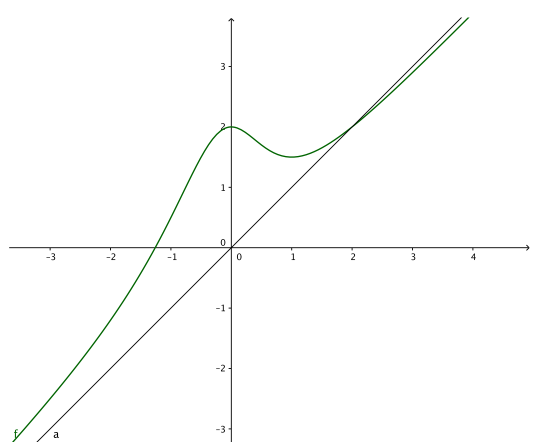
$$f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}.$$

Comme dans la première question, on ne peut pas écrire $f'(x) = \dfrac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$ *avant d'avoir fini toutes les vérifications.*

b) Le discriminant de $x^2 + x + 4$, $\Delta = 1 - 16 = -15$ étant strictement négatif, cette expression est de signe constant (toujours positive). Le signe de $f'(x)$ est donc donnée par le signe de $x(x-1)$.
On en déduit que la fonction est croisante sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

c) Avec l'expression donnée en 1)a), il est facile de montrer que f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.

3)(1pt) On a tous les éléments pour dessiner le graphe avec son asymptote.



Remarque : $\sqrt[3]{2} \simeq 1,26$.

Exercice 2 Une bijection (6pts)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad (2.1)$$

1)(1pt) Etude de la parité.

a) En utilisant que $e^a.e^b = e^{a+b}$, on obtient facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})} \quad (2.2)$$

b)On en déduit que

$$g(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}.$$

On en déduit que

$$g(-x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}} = \frac{-(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}.$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = -g(x)$ et la fonction g est impaire.

2)(1pt) Limites aux bornes.

a) On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc en utilisant l'expression (2.1)

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1.$$

b) Comme g est impaire, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

3)(1,5pt) Etude des variations de g.

a) g est le rapport de deux fonctions dérivables dont le dénominateurs ne s'annule pas, g est donc dérivable. En utilisant la formule de dérivation d'un rapport avec l'expression (2.1), on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}. \end{aligned}$$

On trouve bien l'expression souhaitée avec $\alpha = 2$.

b) On constate que g' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue et à valeurs dans $]-1, 1[$, donc d'après un résultat de cours g définit une bijection de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1, 1[$.
On note g^{-1} la réciproque ainsi définie sur I.

4)(1pt) Une autre expression de g'.

a) En partant de l'expression (2.1), on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1-g^2(x) &= 1-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \\ &= \frac{(e^x+1)^2-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}+2e^x+1-(e^{2x}-2e^x+1)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat souhaité avec $\beta = 4$.

b) On avait vu que $g'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. On en déduit que $g'(x) = \dfrac{1}{2}(1-g^2(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5)(1,5pt) Etude de la dérivabilité de g^{-1}.

a) et b) On sait que si une fonction g bijective de J dans I est dérivable et que sa dérivée ne s'annulle pas alors g^{-1} est dérivable sur I et pour tout $y \in I$

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}.$$

c) On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{1}{2}(1-g^2(x))$ donc en remplaçant x par $g^{-1}(y)$, on a

$$\begin{aligned} g'(g^{-1}(y)) &= \frac{1}{2}(1-g^2(g^{-1}(y))) \\ &= \frac{1}{2}(1-(g(g^{-1}(y))^2) \\ &= \frac{1}{2}(1-y^2) \end{aligned}$$

Comme $(g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(y)}$, cn en déduit que

$$\forall y \in I, \quad (g^{-1})'(y) = \frac{2}{1-y^2}.$$

Exercice 3 Probabilité (5pts)

En 2013 en France métropolitaine, il a été constaté que 80% des malades victimes de la grippe ont présenté dans les premiers jours de la maladie une fièvre supérieure à 39°. Il a été constaté que cette même année seulement 10% de la population a présenté ce symptôme mais que 75% des personnes présentant une fièvre supérieure à 39° avait la grippe.

Dans le cours, il a été utilisé la notation suivante pour parler de la probabilité d'avoir l'événement B sachant l'événement A : $P_A(B)$. On peut aussi utiliser la notation $P(B|A)$, attention avec cette notation où $B|A$ n'est pas un événement, c'est B l'événement et $P(\ \ |A)$ qui est la fonction probabilité sachant A.

Petit rappel de vocabulaire : un symptôme est une manifestation clinique observée ; c'est l'observation de plusieurs symptômes qui permet généralement de poser un diagnostic. Un même symptôme peut généralement être observé pour plusieurs maladies.

1)(2pts) Si on note G l'évènement être malade de la grippe et si on note F l'évènement avoir une fièvre supérieure à 39° dans les premiers jours. L'énoncé nous donne

- 80% des malades victimes de la grippe ont présenté dans les premiers jours de la maladie une fièvre supérieure à 39°, c'est à dire que $P_G(F) = 0,8$.
- 10% de la population a présenté ce symptôme, c'est à dire que$P(F) = 0,1$. *Il est évident pour quelqu'un ayant un peu de vocabulaire que "le symptôme" et "F" sont un seul et même événement.*
- 75% des personnes présentant une fièvre supérieure à 39° avait la grippe, c'est à dire que $P_F(G) = 0,75$.

2)(1,5pt) On sait que $P(F \cap G) = P(F).P_F(G) = P(G).P_G(F)$.
On en déduit que $0,1 \times 0,75 = P(G) \times 0,8$. En utilisant que $0,75 = \frac{3}{4}$, $0,8 = \frac{4}{5}$, on a donc $P(G) = 0,1 \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}$ et donc $P(G) = 0,1 \times \frac{15}{16} = 0,09375$.

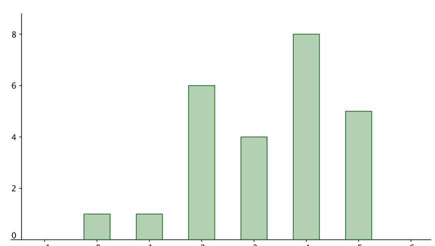
3) (1,5pts) On cherche le pourcentage parmis les personnes n'ayant pas la grippe qui présentaient ce symptôme soit $P_{\bar{G}}(F)$. Or par définition, $P_{\bar{G}}(F) = \dfrac{P(\bar{G} \cap F)}{P(\bar{G})}$. En utilisant la loi des probabilités totales, $P(F) = P(G \cap F) + P(\bar{G} \cap F)$ et $P(\bar{G}) = 1 - P(G)$.
On en déduit que $P(\bar{G} \cap F) = P(F) - P(G \cap F) = 0,1 - 0,1 \times 0,75 = 0,1 \times 0,25$ et que $P(\bar{G}) = 1 - 0,09375 = 0,90625$.
Donc $P_{\bar{G}}(F) = \dfrac{0,1 \times 0,25}{0,90625} \simeq 0,0276$.

Exercice 4 Statistiques descriptives (4pts)

Sur une classe de 25 élèves de CE2, on a relevé les notes suivantes à une évaluation de français notée sur 5.

Notes	0	1	2	3	4	5
Effectif	1	1	6	4	8	5

1)(0,5pt) Faire une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons.



2) (2pts) On remarque que l'effectif total est de 25, on a donc le tableau des les fréquences et les fréquences cumulées suivant

Notes	0	1	2	3	4	5
Effectif	1	1	6	4	8	5
Fréquences	0,04	0,04	0,24	0,16	0,32	0,2
Fr. cumulées	0,04	0,08	0, 32	0,48	0,8	1

Pour les calculs, on rappelle que $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$.
3) (1,5pts) Le premier quartile est le moment où la fréquence cumulée dépasse 0,25 soit 2.

La médiane est le moment où la fréquence cumulée dépasse 0,5 soit 4.
Le troisième quartile est le moment où la fréquence cumulée dépasse 0,75 soit encore 4.
On obtient la boite à moustaches suivante :