Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2013
L1-SV Mathématiques pour les Sciences
Durée 2 heures, documents interdits

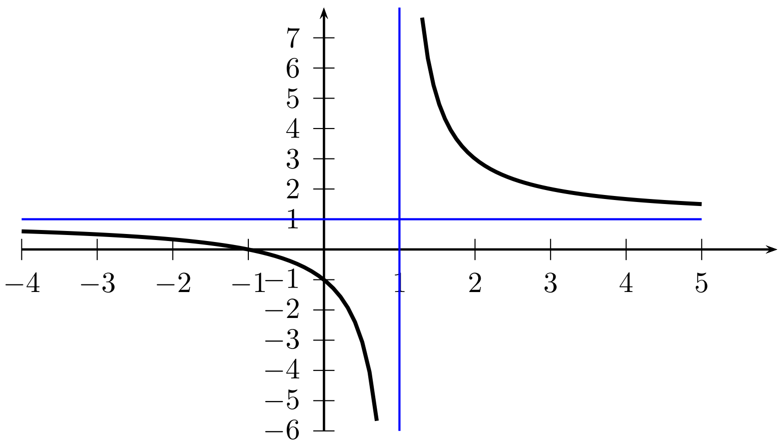
UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Premier Exercice

On étudie donc la fonction $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

1. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. On a $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$. f' est toujours négative.
3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.
4. La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote vertical et la droite d'équation $y = 1$ est un asymptote horizontale.
5. Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	||	$-$	
f	$1 \searrow$	$-\infty$	||	$+\infty \searrow$	1



6. Courbe représentative de f.

Second Exercice

1. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. $f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2+1} = \frac{2}{4x^2+4x+2}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$, f est donc strictement croissante. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle). f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a : $y = \arctan(2x+1) \Leftrightarrow \tan y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{\tan y - 1}{2}$. La fonction f^{-1} est définie de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(x) = \frac{\tan x - 1}{2}$.

Troisième Exercice

1. Calcul de $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\,dt$. On pose $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = t$. Alors $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ et $v'(t) = 1$. La formule d'intégration par parties donne :
   $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\,dt == [-te^{-t}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -e^{-t}\,dt = -\mathrm{e}^{-1} + [-\mathrm{e}^{-t}]_0^1 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$.
2. Calcul de $\int_1^2 \frac{1}{t}\ln(t)\,dt$. Posons $f(t) = \ln(t)$. Alors $f'(t) = \frac{1}{t}$. On a donc $\int_1^2 \frac{1}{t}\ln(t)\,dt = \int_1^2 f'(t)f(t)\,dt = [\frac{1}{2}f(t)^2]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln(2))^2$.
3. Une mise au même dénominateur permet de vérifier l'égalité. On a donc :

   $$\int_2^4 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 3\int_2^4 \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_2^4 \frac{1}{x-1}\,dx\Big)$$

   D'où

   $$\int_2^4 f(x)\,dx = \frac{1}{4}[\ln(x^2+1]_2^4 + \frac{3}{2}[\arctan(x)]_2^4 + \frac{1}{2}[\ln(x-1)]_2^4 =$$

   $$\frac{1}{4}\ln(17) - \frac{1}{4}\ln(5) + \frac{3}{2}\arctan(4) - \frac{3}{2}\arctan(2) + \frac{1}{2}\ln(3)$$

Quatrième Exercice

1. Sur $]-1, +\infty[$, l'équation s'écrit : $y' + \frac{1}{1+x}y = 0$. Il s'agit donc d'une équation linéaire du premier ordre sans second membre. Les solutions sont donc données par $y(x) = C\mathrm{e}^{-\ln(x+1)} = C\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{x+1})} = C\frac{1}{x+1}$ où $C \in \mathbb{R}$.
2. (a) On recherche une solution sous la forme $y_0(x) = a + b\ln(1+x)$. Alors $y_0'(x) = \frac{b}{x+1}$. On remplace dans l'équation avec second membre. On obtient donc $(1+x)\frac{b}{1+x} + a + b\ln(1+x) = 1 + \ln(1+x)$; ce qui donne $b = 1$ et $a = 0$. D'où $y_0(x) = \ln(1+x)$.
   (b) Les solutions de (E) sur $]-1, +\infty[$ sont données par $y(x) = C\frac{1}{1+x} + \ln(1+x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Cinquième Exercice

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$. Les racines de cette équation sont 1 et -1. Les solutions de l'équation différentielle sont donc $y(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}$ avec A et B réels.
2. L'équation caractéristique est $r^2+r+1 = 0$. $\Delta = -3$. Il n'y a donc pas de racine réelle. Alors $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc $y(x) = A\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ avec A et B réels.