Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2013
L1-SV Mathématiques pour les Sciences
Durée 2 heures, documents interdits

Premier Exercice - 5 points

On veut étudier la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{(1/x)}\sqrt{x+4}$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{(1/x)}}{2x^2\sqrt{x+4}}(x^2 - 2x - 8)$ et étudier le signe de f'.
3. Donner les limites de f au bornes du domaine de définition.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe représentative de f.

Second Exercice - 5 points

On considère les deux nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
On définit $z_3 \in \mathbb{C}$ par $z_3 = z_1 z_2$.

1. Donner la partie réelle de z_3 ainsi que sa partie imaginaire.
2. Donner le module et un argument de z_1 et z_2. Puis écrire ces complexes sous forme trigonométrique.
3. Donner, à l'aide de la question précédente, la forme trigonométrique de z_3.
4. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Troisième Exercice - 4 points

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \arctan x \, dx$
2. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t} \, dt$
   (Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{t}$ ou écrire $\frac{1-\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$).

Quatrième Exercice - 5 points

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ sur $I =]0, +\infty[$
   Calculer les constantes a, b et c telles que, pour tout x de I, $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$
2. En déduire les primitives de f sur I.
3. On considère maintenant l'équation différentielle : $xy' - y = \dfrac{x}{1+x^2}$ (E)
   (a) Résoudre l'équation sans second membre sur I.
   (b) Trouver une solution particulière de l'équation complète sur I, par la méthode de variation de la constante.
   (c) Trouver toutes les solutions de l'équation (E).

Cinquième Exercice - 3 points

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 13y = 0$
2. $y'' - 3y' + 2y = 0$