Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2013
L1-SV Mathématiques pour les Sciences
Durée 2 heures, documents interdits

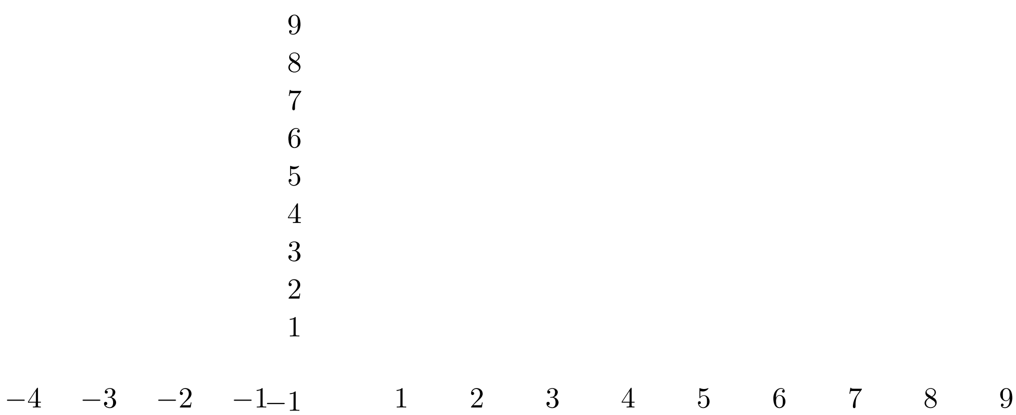
Premier Exercice

On étudie donc la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{(1/x)}\sqrt{x+4}$.

1. Le domaine de définition de f est $D_f = [-4, 0[\cup]0, +\infty[$
2. On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{(1/x)} + \mathrm{e}^{(1/x)}\frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{\mathrm{e}^{(1/x)}}{2x^2\sqrt{x+4}}(x^2-2x-8)$. Les racines de l'équation $x^2-2x-8=0$ sont -2 et 4. On en déduit donc que f' est positive sur $]-4, -2[\cup]4, +\infty[$ et négative sur $]-2, 0[\cup]0, 4[$.
3. On a $f(-4) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. Tableau de variation de f.

x	-4		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	0.86	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	3.63	↗	$+\infty$

5. Courbe représentative de f



Second Exercice

On considère les deux nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. On pose $z_3 = z_1 z_2$.

1. On a $\mathrm{Re}(z_3) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\mathrm{Im}(z_3) = \frac{1}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
2. $|z_1| = |z_2| = 1$. Un argument de z_1 est $\frac{\pi}{3}$ et un argument de z_2 est $-\frac{\pi}{4}$. On en déduit donc que $z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$
3. En utilisant les formes trigonométriques de z_1 et z_2, on obtient $z_3 = \mathrm{e}^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$
4. On sait que $z_3 = \cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})$. En utilisant la question 1, on obtient : $\cos(\frac{\pi}{12}) = \mathrm{Re}(z_3) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Troisième Exercice

1. On utilise une intégration par parties en posant $u'(x) = 1$ d'où $u(x) = x$ et $v(x) = \arctan x$, d'où $v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ce qui donne :
   $\int_0^1 \arctan x \, dx = \Big[x \arctan x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$
2. Posons $u = \sqrt{t}$. On a alors $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, ce qui donne
   $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t} \, dt = \int_1^2 \frac{1-u}{u^2} 2u \, du = 2\int_1^2 (\frac{1}{u} - 1) \, du = 2\Big[\ln u - u\Big]_1^2 = 2\ln 2 - 2$

Quatrième Exercice

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$ sur $I =]0, +\infty[$ On cherche a, b et c telles que, pour tout x de I, $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$. On $f(x) = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$. En procédant par identification, on obtient $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$.
2. $f(x) = \frac{a}{x} - \frac{x}{x^2+1}$. Les primitives de f sont données par $F(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
3. Soit l'équation différentielle : $xy' - y = \frac{x}{1+x^2} \quad (E)$
   (a) L'équation sans second membre est $y' - \frac{1}{x}y = 0$. Les solutions sont $y(x) = C\mathrm{e}^{\ln x} = Cx$, avec $C \in \mathbb{R}$.
   (b) On applique la méthode de variation de la constante. On a $y'(x) = C'(x)x + C(x)$. En remplaçant dans l'équation avec second membre, on obtient $x(C'(x)x + C(x)) - C(x)x = \frac{x}{x^2+1}$. D'où $C'(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$. D'après la question 2, $C(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Une solution particulière de l'équation complète est donc $y_0(x) = x\ln x + \frac{1}{2}x\ln(1+x^2)$.
   (c) Les solutions de (E) sont $y(x) = Cx + x\ln x + \frac{1}{2}x\ln(1+x^2)$, où $C \in \mathbb{R}$.

Cinquième Exercice

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 13 = 0$. Les racines de cette équation sont $2 + 3i$ et $2 - 3i$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc $y(x) = A\mathrm{e}^{2x}\cos(3y) + B\mathrm{e}^{2x}\sin(3y)$ avec A et B réels.
2. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$. Les racines de cette équation sont 1 et 2. Les solutions de l'équation différentielle sont donc $y(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x}$ avec A et B réels.